



**Carla Sofia Fernandes
Machado**

**Atingibilidade de sistemas discretos 1D e 2D
estruturados**



**Carla Sofia Fernandes
Machado**

**Atingibilidade de sistemas discretos 1D e 2D
estruturados**

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, com especialização em Matemática Empresarial e Tecnológica, realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Ricardo Jorge Aparício Gonçalves Pereira e da Prof.^a Doutora Rita Isabel Gonçalves Simões, Professores Auxiliares do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

o júri / the jury

presidente / president

Doutor Agostinho Miguel Mendes Agra

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Doutora Maria Paula Macedo Rocha Malonek

Professora Catedrática da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Doutor Ricardo Jorge Aparício Gonçalves Pereira

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (Orientador)

agradecimentos

Ao Doutor Ricardo Pereira que foi mais do que orientador, este trabalho não teria sido possível sem a sua ajuda, empenho, disponibilidade e trabalho.

À Doutora Rita Simões como co-orientadora pela ajuda e apoio.

Agradeço aos meus pais e irmã, sem eles nada na minha vida faria sentido. São os meus verdadeiros alicerces.

Palavras-chave

sistemas discretos, sistemas estruturados, atingibilidade, grafos

Resumo

O presente trabalho estuda sistemas discretos 1D e 2D estruturados, isto é, sistemas onde todas as entradas das matrizes do sistema ou são parâmetros independentes ou são zeros fixos. A atingibilidade destes sistemas é caracterizada quer algebricamente quer usando a teoria de grafos.

Keywords

discrete systems, structured systems, reachability, graphs

Abstract

This work studies 1D and 2D structured discrete systems, i.e., systems where all the entries of the system matrices are either independent parameters or fixed zeros. The reachability of such systems is characterized both algebraically and applying graph theory.

Conteúdo

Conteúdo	i
Introdução	ii
1 Sistemas discretos	1
1.1 Sistemas discretos em espaço de estados	1
1.2 Atingibilidade	7
1.3 Sistemas estruturados	11
2 Grafos e Sistemas	26
2.1 Generalidades sobre grafos	26
2.2 Grafo de um sistema estruturado	29
3 Sistemas 2D	45
3.1 Modelo Fornasini-Marchesini	45
3.2 Atingibilidade local e global	48
3.3 Sistemas 2D estruturados	51
3.4 Sistemas 2D Positivos	58
Conclusão	63
Bibliografia	64

Introdução

Ao longo do tempo, os sistemas lineares têm vindo a ser objeto de estudo em diversas áreas, nomeadamente, em matemática, física, economia, entre outras. Em particular, os sistemas lineares discretos em espaço de estados (sistemas cujos modelos matemáticos envolvem equações matriciais às diferenças de primeira ordem) surgem frequentemente em situações práticas onde as observações e as estratégias de controlo são implementadas em instantes de tempo discretos. Uma análise detalhada deste tipo de sistemas pode ser encontrada em [8].

Na prática, ao modelar um sistema físico, o sistema pode conter parâmetros que representam as relações empíricas entre variáveis, por exemplo, uma variável de estado ser a derivada de outra variável de estado e, para além disso, a ausência de relação entre variáveis dá origem a entradas nulas fixas nas matrizes do sistema.

Com o objetivo de obter informação estrutural, em 1974, Lin [9] introduziu o conceito de sistema estruturado para sistemas com uma única entrada e essa abordagem foi posteriormente generalizada por outros autores para sistemas com múltiplas entradas [7, 12, 10].

Num sistema estruturado, todas as entradas das matrizes do sistema ou são parâmetros independentes ou são zeros fixos. Neste contexto, um sistema estruturado representa uma ampla classe de sistemas lineares. Note-se que

a estrutura basicamente é determinada pela localização dos zeros fixos nas matrizes. Um compêndio sobre sistemas estruturados pode ser encontrado em [4].

O facto de considerarmos apenas a estrutura do sistema também tem inconvenientes pois alguns aspetos que podem influenciar fortemente algumas propriedades do sistema são completamente ignorados como, por exemplo, as entradas fixas não nulas ou, em geral, as relações entre entradas das matrizes.

Para sistemas estruturados, a questão relevante não é se uma propriedade é válida para alguns valores dos parâmetros específicos, mas sim se é uma propriedade genérica, isto é, se é uma propriedade que é válida para “quase todos” os valores dos parâmetros. Uma propriedade genérica dos sistemas estruturados é a atingibilidade [8]; um sistema diz-se atingível se, partindo da origem, for possível atingir qualquer estado do sistema num determinado número de passos, desde que sejam tomadas entradas adequadas. O estudo da atingibilidade de sistemas estruturados é o objetivo principal desta tese.

A um sistema estruturado podemos associar, de forma natural, um grafo orientado cujos vértices correspondem às variáveis (entradas, estados, saídas), e com aresta entre dois vértices se houver um parâmetro não nulo que relaciona as variáveis correspondentes nas equações [9, 10]. Usando a teoria de grafos, as propriedades genéricas de sistema estruturados, nomeadamente a atingibilidade, têm caracterizações elegantes e fáceis de verificar.

Os sistemas estruturados foram recentemente estendidos para o caso 2D [11]. Uma das representações mais frequente de sistemas 2D é o modelo de espaço de estados Fornasini-Marchesini [5]. Neste modelo faz-se a distinção entre estados locais, isto é, os valores do estado num certo ponto (i, j) e estados globais, que consistem na coleção de todos os espaços locais ao longo de um espaço de separação. Esta distinção motivou a definição das propriedades

dos sistemas quer a um nível local quer a um nível global. A atingibilidade global de um sistema 2D estruturado foi introduzida e caracterizada [11], quer analiticamente quer usando a teoria dos grafos. Tanto quanto sabemos ainda não foi estabelecida nenhuma caracterização da atingibilidade local de sistemas 2D estruturados. Usando a teoria de grafos, em [6], foi caracterizada a atingibilidade local de sistemas 2D positivos, sistemas esses onde todas as variáveis e entradas das matrizes do sistema são não negativas.

No primeiro capítulo começamos por introduzir os sistemas discretos em espaço de estados e caracterizamos a atingibilidade deste tipo de sistemas. A seguir definimos os sistemas estruturados e a sua atingibilidade estrutural, caracterizando-a algebricamente.

No capítulo 2 mostramos como os sistemas estruturados podem ser representados usando grafos orientados e a atingibilidade estrutural de um sistema estruturado é novamente caracterizada, agora usando a teoria de grafos.

No último capítulo introduzimos os sistemas 2D de acordo com o modelo Fornasini-Marchesini de espaço de estados e caracterizamos a atingibilidade local e global de tais sistemas. A seguir definimos sistemas 2D estruturados e usamos a teoria de grafos para estudar a sua atingibilidade global. Finalmente introduzimos os grafos 2D e aplicamos esse conceito para estudar a atingibilidade local de sistemas 2D positivos.

Todos os resultados apresentados nesta tese têm por base as referências indicadas.

Capítulo 1

Sistemas discretos

Neste capítulo começamos por introduzir os sistemas discretos em espaço de estados e caracterizamos a atingibilidade deste tipo de sistemas. A seguir definimos os sistemas estruturados, que serão o principal objeto de estudo desta tese. Finalmente, a propriedade de atingibilidade estrutural de um sistema estruturado é introduzida e caracterizada algebricamente.

1.1 Sistemas discretos em espaço de estados

Uma representação em espaço de estados é um modelo matemático composto por um conjunto de variáveis de entrada, de saída e de estado relacionadas entre si por meio de equações matriciais diferenciais (no caso contínuo) ou às diferenças (no caso discreto) de primeira ordem. A representação em espaço de estados fornece uma maneira prática e compacta para modelar e analisar sistemas com múltiplas entradas e saídas. Nesta tese iremos apenas abordar o caso discreto.

Definição 1.1.1. Um *sistema discreto em espaço de estados* linear e invariante no tempo com m entradas e p saídas é representado pelas equações matriciais

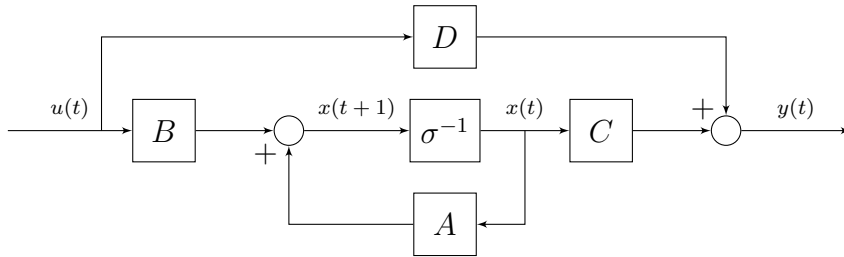
$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) & (1.1) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) & (1.2) \end{cases}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ e $x(\cdot) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $u(\cdot) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor das entradas e $y(\cdot) \in \mathbb{R}^p$ é o vetor das saídas.

Introduzindo o *operador deslocamento* σ tal que $\sigma x(t) = x(t+1)$, para todo $t \in \mathbb{Z}$, o sistema anterior pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \sigma x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

e representado esquematicamente por



Se conhecermos o valor do estado no instante inicial, $x(0)$, podemos calcular $x(1)$ e $x(2)$ da seguinte forma:

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1)$$

$$= A(Ax(0) + Bu(0)) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)$$

Admitindo que, para $t > 0$,

$$x(t) = A^t x(0) + A^{t-1} Bu(0) + A^{t-2} Bu(1) + \cdots + ABu(t-2) + Bu(t-1)$$

então, de (1.1), vem que

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\ &= A(A^t x(0) + A^{t-1} Bu(0) + A^{t-2} Bu(1) + \cdots + Bu(t-1)) + Bu(t) \\ &= A^{t+1} x(0) + A^t Bu(0) + A^{t-1} Bu(1) + \cdots + ABu(t-1) + Bu(t), \end{aligned}$$

ficando demonstrado, por indução, que

$$x(t) = A^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} A^{t-1-i} Bu(i). \quad (1.3)$$

De (1.2), temos que a saída do sistema é dada por

$$y(t) = CA^t x(0) + \sum_{i=0}^{t-1} CA^{t-1-i} Bu(i) + Du(t).$$

Se tivermos um sistema com entradas nulas, isto é, $u \equiv 0$, então o sistema resume-se a

$$\begin{cases} x(t+1) = Ax(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

cujas soluções são

$$x(t) = A^t x(0) \text{ e } y(t) = CA^t x(0).$$

No que se segue iremos apresentar alguns exemplos de sistemas discretos em espaços de estados.

Exemplo 1.1.2. Para modelar o stock diário de um certo produto existente numa loja, consideremos $y(t)$ o stock do produto no início do dia t , $u_1(t)$ as encomendas efetuadas no dia t que chegam no dia $t+1$ e $u_2(t)$ o volume de vendas do dia t .

O stock do produto no início do dia seguinte, isto é, $y(t+1)$, é obtido através da soma do stock atual $y(t)$ com as encomendas feitas no dia anterior,

$u_1(t-1)$, que chegaram entretanto, subtraindo-lhe as vendas do dia, $u_2(t)$.

Ou seja:

$$y(t+1) = y(t) + u_1(t-1) - u_2(t).$$

Definindo $x_1(t) = y(t)$ e $x_2(t) = u_1(t-1)$, obtemos

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= x_1(t) + x_2(t) - u_2(t) \\ x_2(t+1) &= u_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{cases}.$$

Sendo

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}$$

podemos então escrever o sistema anterior na forma de espaços de estados

$$\begin{cases} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}.$$

◇

Exemplo 1.1.3. Consideremos uma população repartida em n classes de idades de igual amplitude (por exemplo, dois anos: a primeira classe compreende os indivíduos cuja idade é menor que dois anos, a segunda cujos indivíduos têm idade menor que 4 anos e maior ou igual a dois, etc). Assumimos como unidade de tempo a amplitude das classes (2 anos, no nosso exemplo). A população é descrita como um vetor

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix},$$

onde a i -ésima componente $x_i(t)$ fornece o número de indivíduos presentes no instante t na i -ésima classe de idades (no nosso exemplo, os indivíduos com idade compreendida entre $2(i-1)$ e $2i$ anos). As componentes do vetor $x(t+1)$ e do vetor $x(t)$ devem estar relacionados tendo em conta os seguintes factos:

- para $i > 1$, a i -ésima classe no instante $t+1$ compreende os indivíduos que, presentes na $(i-1)$ -ésima classe no instante t , sobreviventes e não emigrados no intervalo entre t e $t+1$, mais os indivíduos que imigraram no mesmo intervalo e que no instante t pertencem à $(i-1)$ -ésima classe de idades.
- os indivíduos presentes na primeira classe no instante $t+1$ são os nascidos no intervalo entre t e $t+1$, filhos dos indivíduos que no instante t se encontram em classes reprodutoras.

A evolução do vector $x(\cdot)$ pode ser representado por um sistema discreto linear e invariante no tempo. Iremos introduzir as seguintes simplificações:

- em cada instante coincidem as distribuições da população masculina e feminina, de modo a referir o modelo apenas para a população feminina;
- a taxa de mortalidade m_i , com $0 \leq m_i \leq 1$, da i -ésima classe de idades é invariante ao longo do tempo de modo a que, para cada $t > 0$

$$x_i(t+1) = x_{i-1}(t) - m_{i-1}x_{i-1}(t) + u_{i-1}(t) = (1 - m_{i-1})x_{i-1}(t) + u_{i-1}(t),$$
 onde $u_{i-1}(t)$ representa o saldo migratório positivo ou negativo, constituído pelos indivíduos da $(i-1)$ -ésima classe no instante t que entraram ou saíram da população no intervalo entre t e $t+1$;
- a taxa de fertilidade α_i da i -ésima classe de idades é invariante no

tempo e temos que:

$$x_1(t+1) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) + \cdots + \alpha_n x_n(t)$$

onde $\alpha_i x_i(t)$ representa o número de nascimentos (do sexo feminino) gerado pela i -ésima classe no intervalo entre t e $t+1$.

- a taxa de sobrevivência β_i da i -ésima classe de idades é também invariante no tempo e é dada por $\beta_i = 1 - m_i$.

Assim, obtemos o seguinte modelo em espaços de estados:

$$x(t+1) = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_{n-1}(t) \end{bmatrix}.$$

◇

Exemplo 1.1.4.

O modelo de espaço de estados discreto duma massa M em movimento numa superfície sem atrito pode, em certas circunstâncias, ser descrito pelo sistema de equações

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \frac{1}{M} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Neste modelo, $y_1(t) = x_1(t)$ é a posição do corpo, $y_2(t) = x_2(t)$ é a sua

velocidade e $u(t)$ a força que lhe é aplicada, que se mantém constante entre dois instantes consecutivos. Por exemplo, um corpo de massa $M = 1000kg$ que, no instante $t = 0$, está na posição nula com uma velocidade de $20m/s$ (ou seja, $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 20$), quando lhe é aplicada uma força constante de $-1000N$ (ou seja, $u(t) = -1000, t > 0$), pára ao fim de $20s$ a uma distância de $200m$ da origem. Se, no entanto, a velocidade no instante $t = 0$ for de $40m/s$ (isto é, $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = 40$), a mesma força só faz parar o corpo ao fim de $40s$ e a uma distância de $800m$ da origem. \diamond

1.2 Atingibilidade

A atingibilidade é uma propriedade fundamental na teoria dos sistemas. De grosso modo, um sistema diz-se atingível se, partindo da origem, for possível atingir qualquer estado do sistema num determinado número de passos, desde que sejam tomadas entradas adequadas.

De agora em diante iremos apenas considerar sistemas da forma

$$x(t+1) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.4)$$

onde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Por (1.3), se $x_0 = 0$, a solução do sistema (1.4) é

$$x(t) = A^{t-1}Bu(0) + A^{t-2}Bu(1) + \cdots + Bu(t-1).$$

Definição 1.2.1. Dado o sistema (1.4), chamamos *matriz de atingibilidade em t passos* desse sistema à matriz $n \times tm$ definida por

$$\mathcal{R}_t(A, B) = \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{t-1}B \end{bmatrix}.$$

Note-se que $\text{Im } \mathcal{R}_t(A, B)$ é um subespaço de \mathbb{R}^n , que consiste nos estados de (1.4) que podem ser atingidos a partir da origem em t passos, aplicando uma sequência de entradas $u(0), u(1), \dots, u(t-1)$. A este subespaço chamamos *subespaço de atingibilidade* do sistema (1.4); representamo-lo por $\mathfrak{R}_t(A, B)$.

Proposição 1.2.2. [8] *Dado o sistema (1.4), então*

$$(a) \quad \mathfrak{R}_{t-1}(A, B) \subset \mathfrak{R}_t(A, B);$$

$$(b) \quad \mathfrak{R}_{t+1}(A, B) = \text{Im } B + A\mathfrak{R}_t(A, B).$$

Demonstração.

$$\begin{aligned} (a) \quad x \in \mathfrak{R}_{t-1}(A, B) &\Leftrightarrow x \in \text{Im} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{t-2}B \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow x \in \text{Im} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{t-2}B & A^{t-1}B \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow x \in \mathfrak{R}_t(A, B) \end{aligned}$$

(b) A prova desta alínea baseia-se no facto de dadas matrizes $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $N \in \mathbb{R}^{n \times p}$ e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\text{Im} \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix} = \text{Im } M + \text{Im } N \quad \text{e} \quad \text{Im} \begin{bmatrix} PM & PN \end{bmatrix} = P \text{Im} \begin{bmatrix} M & N \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{t+1}(A, B) &= \text{Im} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^tB \end{bmatrix} \\ &= \text{Im } B + \text{Im} \begin{bmatrix} AB & \dots & A^tB \end{bmatrix} \\ &= \text{Im } B + A \text{Im} \begin{bmatrix} B & \dots & A^{t-1}B \end{bmatrix} \\ &= \text{Im } B + A\mathfrak{R}_t(A, B). \end{aligned}$$

□

Definição 1.2.3. O sistema (1.4) diz-se *atingível* se $\mathfrak{R}_n(A, B) = \mathbb{R}^n$.

No teorema seguinte apresentamos várias caracterizações de atingibilidade.

Teorema 1.2.4. [8] *As seguintes proposições são equivalentes:*

- (a) *O sistema (1.4) é atingível.*
- (b) $\text{rank } \mathcal{R}_n(A, B) = n$.
- (c) *Se $w^\top B = 0$ e $w^\top A = \mu w^\top$, com $\mu \in \mathbb{C}$, então $w^\top = 0$.*
- (d) $\text{rank } \begin{bmatrix} \mu I - A & B \end{bmatrix} = n$, para todo $\mu \in \mathbb{C}$.

Demonstração.

(a) \Leftrightarrow (b) Esta equivalência é óbvia pois, por definição, o sistema (1.4) é atingível se e só se $\mathfrak{R}_n(A, B) = \text{Im } \mathcal{R}_n(A, B) = \mathbb{R}^n$, o que por sua vez é equivalente a $\text{rank } \mathcal{R}_n(A, B) = n$.

(b) \Rightarrow (c) Suponhamos que $\text{rank } \mathcal{R}_n(A, B) = n$ e que $w^\top B = 0$ e $w^\top A = \mu w^\top$, com $\mu \in \mathbb{C}$. Então

$$w^\top \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w^\top B & w^\top AB & \cdots & w^\top A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

e, por hipótese,

$$w^\top B = 0, \quad w^\top AB = \mu w^\top B = 0, \quad w^\top A^2 B = \mu^2 w^\top B = 0, \dots$$

Consequentemente

$$w^\top \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = 0$$

e, como $\text{rank } \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix} = n$, obtemos $w^\top = 0$.

(c) \Rightarrow (b) Vamos provar esta implicação por contra-posição, ou seja, vamos mostrar que se $\text{rank } \mathcal{R}_n(A, B) < n$ então existe $w^\top \neq 0$ tal que $w^\top B = 0$

e $w^\top A = \mu w^\top$, para algum $\mu \in \mathbb{C}$.

Por hipótese, $\text{rank } \mathcal{R}_n(A, B) = r < n$, para algum $r \in \mathbb{N}$, o que implica que $\dim(\text{Im } \mathcal{R}_n(A, B)) = r$.

Seja (b_1, \dots, b_r) uma base de $\text{Im } \mathcal{R}_n(A, B)$. Vamos considerar b_{r+1}, \dots, b_n tais que $(b_1, \dots, b_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$ seja uma base de \mathbb{R}^n .

Nesta nova base, podemos reescrever as matrizes A e B , respetivamente, da seguinte forma

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} \bar{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

com $\bar{A}_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\bar{A}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ e $\bar{B}_1 \in \mathbb{R}^{r \times m}$.

Seja $\bar{w}^\top = \begin{bmatrix} 0 & \bar{w}_2 \end{bmatrix}$, onde \bar{w}_2 um vetor próprio de \bar{A}_{22}^\top associado ao valor próprio μ . Então $\bar{w}^\top \bar{B} = 0$ e

$$\bar{w}^\top \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{w}_2^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} \\ 0 & \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{w}_2^\top \bar{A}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mu \bar{w}_2^\top \end{bmatrix} = \mu \bar{w}^\top.$$

(c) \Rightarrow (d) Suponhamos que se $w^\top B = 0$ e $w^\top A = \mu w^\top$, com $\mu \in \mathbb{C}$, então $w^\top = 0$. Seja $\mu \in \mathbb{C}$ arbitrário tal que $w^\top \begin{bmatrix} \mu I - A & B \end{bmatrix} = 0$, isto é, $\begin{bmatrix} \mu w^\top - w^\top A & w^\top B \end{bmatrix} = 0$. Logo $\mu w^\top - w^\top A = 0$ e $w^\top B = 0$, o que implica, por hipótese, que $w^\top = 0$. Portanto $\text{rank} \begin{bmatrix} \mu I - A & B \end{bmatrix} = n$.

(d) \Rightarrow (c) Suponhamos agora que $\text{rank} \begin{bmatrix} \mu I - A & B \end{bmatrix} = n$, para todo $\mu \in \mathbb{C}$, e $w^\top B = 0$ e $w^\top A = \mu w^\top$, para algum $\mu \in \mathbb{C}$.

Das últimas equações, obtemos $w^\top \begin{bmatrix} \mu I - A & B \end{bmatrix} = 0$, e, portanto, $w^\top = 0$ pois, por hipótese, $\text{rank} \begin{bmatrix} \mu I - A & B \end{bmatrix} = n$. \square

1.3 Sistemas estruturados

O principal objetivo deste trabalho é caracterizar a atingibilidade de um tipo particular de sistemas, denominados sistemas estruturados, introduzidos pela primeira vez em 1974 por Lin [9]. Nestes sistemas todas as entradas das matrizes são nulas ou são parâmetros independentes.

Definição 1.3.1. Seja $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dizemos que M é uma *matriz estruturada* se as suas entradas forem nulas ou parâmetros independentes. Estes parâmetros serão designados por entradas livres. Se M tiver r entradas livres então pode ser parametrizada por um vetor de parâmetros $\lambda \in \mathbb{R}^r$ e denotaremos a matriz estruturada por M_λ (ou por M^λ , quando for oportuno).

Observe-se que numa matriz estruturada assume-se que o valor concreto de cada entrada livre é desconhecido, mas pode tomar qualquer valor real, incluindo o zero.

Definição 1.3.2. Seja $M_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$ uma matriz estruturada e $M^* \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dizemos que M^* é uma *matriz admissível* (em relação a M_λ) se se puder obter a partir M_λ fixando as entradas livres (para alguns valores particulares).

Exemplo 1.3.3. Sejam λ_i , com $i = 1, 2, 3$, parâmetros independentes. Então a matriz

$$M_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

é uma matriz estruturada onde $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$, e considerando, por exemplo, $\lambda = (1, 2, 0)$, uma matriz admissível em relação à matriz anterior é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

No entanto, nem $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_1 & 0 \end{bmatrix}$ nem $\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ são matrizes estruturadas, pois na primeira os parâmetros não são independentes e na segunda existe uma entrada constante não nula. \diamond

No contexto das matrizes estruturadas é muito relevante a noção de característica apresentada a seguir.

Definição 1.3.4. A *característica* de uma matriz estruturada $M_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a característica máxima que M_λ atinge como função dos seus parâmetros livres, e denotamos por $\rho(M_\lambda)$.

Dizemos que $M_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$, com $n \leq m$, tem *característica máxima* se $\rho(M_\lambda) = n$. Portanto, uma matriz M_λ tem característica máxima se e só se existir uma matriz admissível M^* com característica máxima.

Definição 1.3.5. Dizemos que o sistema (1.4) é um *sistema estruturado* se A e B são duas matrizes estruturadas.

Se no sistema (1.4) assumirmos que as matrizes A e B são matrizes estruturadas que têm, em conjunto, p entradas não nulas, o sistema pode ser parametrizado por meio de um vetor de parâmetros $\lambda \in \mathbb{R}^p$.

Nota 1.3.6. Iremos representar os vetores de parâmetros das matrizes estruturadas A e B pela mesma letra λ , isto é, λ é um vetor de parâmetros que contém os parâmetros de A e B .

Assim, reescrevemos o sistema (1.4) da seguinte forma:

$$x(t+1) = A_\lambda x(t) + B_\lambda u(t), \quad (1.5)$$

com $\lambda \in \mathbb{R}^p$. De forma simplificada, representaremos o sistema (1.5) apenas pelo par (A_λ, B_λ) .

Escolhendo λ , o sistema (1.5) torna-se totalmente conhecido, e pode ser visto como um sistema não estruturado da forma (1.4). Assim, para cada valor de λ , as propriedades teóricas do sistema podem ser estudadas de maneira habitual. É evidente que estas propriedades podem depender dos valores dos parâmetros e serem válidas para alguns desses valores e não válidas para outros. Neste contexto, para sistemas estruturados, a questão relevante não é se uma propriedade é válida para alguns valores dos parâmetros específicos, mas sim se é uma *propriedade genérica*, isto é, se é uma propriedade que é válida para “quase todos” os valores dos parâmetros, ou seja, é válida para todos os valores dos parâmetros exceto para parâmetros que pertencem a um subconjunto de \mathbb{R}^p com medida de Lebesgue zero [3]. Assim:

Definição 1.3.7. Dizemos que o sistema estruturado (1.5) tem uma determinada propriedade \mathbf{P} se \mathbf{P} é uma *propriedade genérica* desse sistema.

Nota 1.3.8. A característica de uma matriz estruturada é uma propriedade genérica, daí ser também denominada característica genérica. Observe-se que uma matriz estruturada com r parâmetros independentes é um caso particular de uma matriz polinomial em p indeterminadas.

Definição 1.3.9. Dizemos que o sistema estruturado (A_λ, B_λ) é *estruturalmente atingível* se existirem matrizes admissíveis A^* e B^* tais que o sistema (A^*, B^*) é atingível.

Note-se que, pelo Teorema 1.2.4, o sistema estruturado (1.5) é atingível se e só se

$$\text{rank } \mathcal{R}_n(A_\lambda, B_\lambda) = \text{rank} \begin{bmatrix} B_\lambda & A_\lambda B_\lambda & \cdots & A_\lambda^{n-1} B_\lambda \end{bmatrix} = n$$

para “quase todos” os $\lambda \in \mathbb{R}^p$. Mas, observando que $\mathcal{R}_n(A_\lambda, B_\lambda)$ é uma matriz polinomial em p indeterminadas, por definição de propriedade genérica,

isso é equivalente a dizer que $\text{rank } \mathcal{R}_n(A^*, B^*) = n$, para algumas matrizes admissíveis A^* e B^* . Isto significa que o sistema estruturado (1.5) é atingível se e só se é atingível para uma escolha de λ , ou seja, é estruturalmente atingível. No entanto, o estudo da característica da matriz polinomial $\mathcal{R}_n(A_\lambda, B_\lambda)$ apenas pode ser feito em testes experimentais, onde um valor de λ que torna o sistema atingível tem de ser encontrado por tentativa e erro.

Note-se que, dadas duas matrizes estruturadas A_λ e B_λ , com $\lambda \in \mathbb{R}^p$, a matriz de atingibilidade $\mathcal{R}_n(A_\lambda, B_\lambda)$ não é necessariamente estruturada, tal como é ilustrado pelo exemplo seguinte.

Exemplo 1.3.10. Sejam $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ e

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \text{ e } B_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

duas matrizes estruturadas. Então

$$\mathcal{R}_2(A_\lambda, B_\lambda) = \begin{bmatrix} B_\lambda & A_\lambda B_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_4 & \lambda_1 \lambda_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

não é uma matriz estruturada pois as suas entradas livres não são independentes. \diamond

Como se pode verificar a seguir, a caracterização da atingibilidade apresentada no Teorema 1.2.4 (d) também não se pode aplicar a sistemas estruturados.

Definição 1.3.11. Definimos uma *matriz polinomial estruturada* $M_\lambda(z)$ como

$$M_\lambda(z) = M_k^\lambda z^k + \cdots + M_1^\lambda z + M_0^\lambda,$$

para algum inteiro não negativo k , onde $\begin{bmatrix} M_0^\lambda & \cdots & M_k^\lambda \end{bmatrix}$ é uma matriz estruturada.

De acordo com a definição anterior, a matriz

$$\begin{bmatrix} zI - A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} -A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}$$

não é uma matriz (polinomial) estruturada.

Assim, se desejarmos fazer o estudo da atingibilidade de um sistema estruturado por meio da análise de matrizes estruturadas devemos usar ferramentas diferentes.

No que se segue iremos introduzir dois conceitos muito importantes neste contexto (ver [4]).

Definição 1.3.12. Sejam $A_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrizes estruturadas. Dizemos que o par (A_λ, B_λ) está na:

- *forma I*, ou que é *reduzível*, se existir uma matriz de permutação $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$PA_\lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^\lambda & 0 \\ A_{21}^\lambda & A_{22}^\lambda \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad PB_\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2^\lambda \end{bmatrix},$$

onde $A_{ij}^\lambda \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$ são matrizes estruturadas para $i, j = 1, 2$, com $0 < n_1 \leq n$ e $n_1 + n_2 = n$, e onde $B_2^\lambda \in \mathbb{R}^{n_2 \times m}$ é uma matriz estruturada.

- *forma II*, ou que *não tem característica máxima*, se a característica da matriz estruturada $\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}$ é menor que n .

A seguinte caracterização alternativa de um par estar na forma II foi introduzido em [12] e é mais simples de verificar.

Teorema 1.3.13. Sejam $A_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrizes estruturadas. O par (A_λ, B_λ) está na forma II se e só se $\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}$ tiver uma submatriz nula do tipo $k \times l$, onde $k + l \geq n + m + 1$.

Exemplo 1.3.14. Consideremos as seguintes matrizes estruturadas

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_4 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$.

Vamos mostrar, usando o teorema anterior, que o par (A_λ, B_λ) está na forma II. Neste caso tem-se $n = 3$ e $m = 1$ e, portanto, $n + m + 1 = 5$.

A partir da matriz

$$\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é possível construir uma submatriz nula do tipo 2×3 . Logo, pelo teorema acima, o par (A_λ, B_λ) está na forma II. \diamond

O principal resultado deste capítulo é o teorema seguinte onde se estabelece uma caracterização da atingibilidade estrutural. Este resultado foi inicialmente provado em 1974 por Lin [9] para o caso de uma única entrada e generalizado em 1976 por vários autores [7, 12] para o caso de múltiplas entradas. No que se segue assumimos que $A_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $B_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes estruturadas.

Teorema 1.3.15. *O sistema estruturado (A_λ, B_λ) é estruturalmente atingível se e só se o par (A_λ, B_λ) não estiver nem na forma I nem na forma II (ou seja, o par (A_λ, B_λ) não é redutível e tem característica (genérica) máxima).*

A demonstração deste teorema será baseada na apresentada em [7] onde são usados os dois lemas auxiliares apresentados a seguir.

Lema 1.3.16. [7] Se o par (A_λ, B_λ) não estiver na forma I nem na forma II, isto é, se não for redutível e $\rho \left(\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix} \right) = n$, então para qualquer partição do tipo

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} A_{11}^\lambda & A_{12}^\lambda \\ A_{21}^\lambda & A_{22}^\lambda \end{bmatrix} \quad e \quad B_\lambda = \begin{bmatrix} B_1^\lambda \\ B_2^\lambda \end{bmatrix},$$

onde $A_{11}^\lambda \in \mathbb{R}^{q \times q}$, tem-se que o par $\left(A_{11}^\lambda, \begin{bmatrix} A_{12}^\lambda & B_1^\lambda \end{bmatrix} \right)$ não está na forma I e $\rho \left(\begin{bmatrix} A_{11}^\lambda & A_{12}^\lambda & B_1^\lambda \end{bmatrix} \right) = q$.

Demonstração. Por redução ao absurdo suponhamos que o par $\left(A_{11}^\lambda, \begin{bmatrix} A_{12}^\lambda & B_1^\lambda \end{bmatrix} \right)$ está na forma I, então existe uma matriz de permutação $P \in \mathbb{R}^{q \times q}$ tal que

$$PA_{11}^\lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^\lambda & 0 \\ A_2^\lambda & A_3^\lambda \end{bmatrix}, \quad PA_{12}^\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ A_4^\lambda \end{bmatrix} \quad e \quad PB_1^\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ B_3^\lambda \end{bmatrix}.$$

Tomando

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

obtemos

$$\bar{P}A_\lambda \bar{P}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^\lambda & 0 & 0 \\ A_2^\lambda & A_3^\lambda & A_4^\lambda \\ A_{21}^\lambda P^{-1} & & A_{22}^\lambda \end{bmatrix} \quad e \quad \bar{P}^\top B_\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2^\lambda \\ B_3^\lambda \end{bmatrix}.$$

Logo, o par (A_λ, B_λ) está na forma I, o que é absurdo. Além disso, $\rho \left(A_{11}^\lambda, \begin{bmatrix} A_{12}^\lambda & B_1^\lambda \end{bmatrix} \right) = q$, uma vez que qualquer conjunto de linhas da matriz $\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}$ é genericamente independente¹. \square

O próximo lema fornece um procedimento para fixar os parâmetros livres das matrizes estruturadas de modo a não alterar a atingibilidade.

¹Note-se que a independência linear é uma propriedade genérica.

Lema 1.3.17. [7] *Seja (A_λ, B_λ) um par tal que $\rho\left(\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}\right) = n$ e $B_\lambda \neq 0$. Então existe uma matriz de permutação $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que*

$$PA_\lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^\lambda & A_{12}^\lambda \\ A_{21}^\lambda & A_{22}^\lambda \end{bmatrix} \quad e \quad PB_\lambda = \begin{bmatrix} B_1^\lambda \\ B_2^\lambda \end{bmatrix},$$

onde $A_{11}^\lambda \in \mathbb{R}^{q \times q}$ com $1 \leq q \leq n-1$ e $A_{22}^\lambda \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$, de tal modo que se verifica uma das seguintes condições:

i) $\rho(A_{11}^\lambda) = q$ e as entradas da matriz $\begin{bmatrix} A_{22}^\lambda & B_2^\lambda \end{bmatrix}$ podem ser fixadas, obtendo a matriz $\begin{bmatrix} A_{22}^* & B_2^* \end{bmatrix}$ de tal modo que $\rho\left(\begin{bmatrix} A_{22}^* & B_2^* \end{bmatrix}\right) = n-q$ e A_{22}^* tem apenas valores próprios nulos.

ii) As entradas das matrizes A_λ e B_λ podem ser fixadas de modo que

$$\rho\left(\begin{bmatrix} 0 & A_{12}^* & B_1^* \\ 0 & A_{22}^* & B_2^* \end{bmatrix}\right) = n$$

e A_{22}^* tem apenas valores próprios nulos.

Demonstração. Como a matriz $\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}$ tem característica (genérica) n e $B_\lambda \neq 0$ então existe um conjunto de parâmetros livres em $\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}$ dados por $\{(1, i_1), (2, i_2), \dots, (n, i_n)\}$, onde (j, i_j) corresponde à entrada (j, i_j) de $\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}$ e $i_j \in \{n+1, \dots, n+m\}$ para pelo menos um j . Fixemos todas estas entradas com o valor 1 e todas as outras com o valor zero, denotando a matriz assim obtida por $\begin{bmatrix} A^* & B^* \end{bmatrix}$. Aplicando a matriz de permutação $P_1 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que coloca as entradas não nulas de B^* nas linhas finais, obtemos:

$$P_1 A^* P_1^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad P_1 B^* = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2^* \end{bmatrix},$$

onde $A_1^* \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_2^* \in \mathbb{R}^{n_1 \times (n-n_1)}$ e $B_2^* \in \mathbb{R}^{(n-n_1) \times m}$ para algum n_1 tal que $n-m \leq n_1 \leq n-1$. Além disso, $\rho\left(\begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}\right) = n_1$ e $\rho(B_2^*) = n-n_1$.

Pode então ocorrer uma das três situações seguintes:

- 1) $\rho(A_1^*) = n_1$ e, neste caso, aplicando a mesma permutação a $\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}$ e fixando $A_{21}^\lambda = 0$ e $A_{22}^\lambda = 0$, chegamos à forma pretendida;
- 2) $A_1^* = 0$ e temos a condição *ii*) diretamente;
- 3) $A_1^* \neq 0$ e $\rho(A_1^*) < n_1$; como $\rho\left(\begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}\right) = n_1$, podemos aplicar o procedimento anterior a $\begin{bmatrix} A_1^* & A_2^* \end{bmatrix}$ para obter

$$P_2 A_1^* P_2^{-1} = \begin{bmatrix} A_3^* & A_4^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P_2 A_2^* = \begin{bmatrix} 0 \\ A_5^* \end{bmatrix},$$

onde $A_3^* \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $\rho\left(\begin{bmatrix} A_3^* & A_4^* \end{bmatrix}\right) = n_2$ e $\rho(A_5^*) = n_1 - n_2$.

Procedendo desta forma sucessivamente iremos cair nas situações 1) e 2).

De facto, considerando a matriz de permutação $P = \text{diag}(P_1, \dots, P_k)$, temos

$$PA^*P^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23}^* & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{34}^* & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \ddots & A_{k-1,k}^* \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad PB^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ B_k^* \end{bmatrix},$$

onde $\begin{bmatrix} A_{11}^* & A_{12}^* \end{bmatrix}$ tem característica (de linha) máxima ou então $A_{11}^* = 0$ ou $A_{12}^* = 0$. Portanto, com esta matriz P , o resultado surge imediatamente. \square

Demonstração do Teorema 1.3.15. A prova da condição necessária é trivial. De facto, se o par (A_λ, B_λ) estiver na forma I, então a matriz de atingibilidade $\mathcal{R}_n(A_\lambda, B_\lambda)$ terá, pelo menos, uma linha nula (para todos os valores

dos parâmetros) e, pelo Teorema 1.2.4 (b), o sistema (A_λ, B_λ) não é estruturalmente atingível. Por outro lado, se o par (A_λ, B_λ) estiver na forma II, é imediato, pelo Teorema 1.2.4 (d), que o sistema (A_λ, B_λ) não é estruturalmente atingível.

A condição suficiente será provada usando a indução matemática. Por hipótese indutiva, suponhamos que o teorema se verifica para sistemas cuja dimensão do estado é menor do que n .

O resultado é claramente válido para sistemas com $n = 1$. Assumindo a hipótese indutiva para sistemas cuja dimensão do estado é menor do que n iremos provar o lema seguinte sobre a atingibilidade estrutural de conexão de sistemas em série/paralelo. Este lema é essencial na demonstração do teorema.

Lema 1.3.18. [7] *Consideremos o par (A_λ, B_λ) dado por*

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} A_{11}^\lambda & A_{12}^\lambda \\ 0 & A_{22}^\lambda \end{bmatrix} \quad e \quad B_\lambda = \begin{bmatrix} B_1^\lambda \\ B_2^\lambda \end{bmatrix},$$

onde $A_{11}^\lambda \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $A_{12}^\lambda \in \mathbb{R}^{q \times (n-q)}$, $A_{22}^\lambda \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$, $B_1^\lambda \in \mathbb{R}^{q \times m}$ e $B_2^\lambda \in \mathbb{R}^{(n-q) \times m}$, com $1 \leq q \leq n-1$.

Assumindo que $(A_{22}^\lambda, B_2^\lambda)$ e $(A_{11}^\lambda, [A_{12}^\lambda \ B_1^\lambda])$ são sistemas estruturalmente atingíveis e que $\rho(A_{11}^\lambda) = q$, então o sistema (A_λ, B_λ) é estruturalmente atingível.

Demonstração. A demonstração será dividida em duas partes: a primeira assume que a matriz A_{11}^λ não está na forma I e a segunda assume que está.

1) Assumindo que A_{11}^λ não está na forma I então:

- visto que $\rho(A_{11}^\lambda) = q$, os parâmetros livres em A_{11}^λ podem ser escolhidos de tal forma que os valores próprios de A_{11}^λ não pertençam a

qualquer conjunto finito de pontos no plano complexo pretendido; (por exemplo, para qualquer concretização A_{11}^* tal que $\rho(A_{11}^*) = q$ multiplicar A_{11}^* por um escalar “suficientemente” grande tal que o seu valor próprio mais pequeno seja maior que a distância de todos os pontos do conjunto a evitar).

- uma vez que $\rho(A_{11}^\lambda) = q$ e A_{11}^λ não está na forma I, então o sistema $(A_{11}^\lambda, b_\lambda)$ (onde b_λ é um vetor estruturado de dimensão q), é estruturalmente atingível para qualquer $b_\lambda \neq 0$ (pela hipótese indutiva do teorema uma vez que $q < n$).

Por hipótese, o sistema $\left(A_{11}^\lambda, \begin{bmatrix} A_{12}^\lambda & B_1^\lambda \end{bmatrix}\right)$ é estruturalmente atingível, então

$$\text{ou } i) A_{12}^\lambda \neq 0 \quad \text{ou } ii) B_1^\lambda \neq 0 \quad \text{ou } iii) (A_{12}^\lambda \neq 0 \text{ e } B_1^\lambda \neq 0).$$

Consideremos os casos anteriores separadamente. Começemos então por assumir que $B_1^\lambda \neq 0$. Assim, pela observação acima, $(A_{11}^\lambda, B_1^\lambda)$ é estruturalmente atingível e os valores para (A_λ, B_λ) podem ser escolhidos por forma que (A_{11}^*, B_1^*) e (A_{22}^*, B_2^*) sejam atingíveis e A_{11}^* e A_{22}^* não tenham valores próprios comuns. Tomando $A_{12}^* = 0$ temos uma conexão em paralelo de dois sistemas atingíveis sem valores próprios em comum que também será atingível [2]. Assim (A_λ, B_λ) é estruturalmente atingível.

Suponhamos agora que $B_1^\lambda = 0$ e $A_{12}^\lambda \neq 0$. Assumiremos, por redução ao absurdo, que (A_λ, B_λ) não é estruturalmente atingível.

Assuma-se que a i -ésima coluna de A_{12}^λ é não nula, denotando-a por b_λ , e seja e o i -ésimo vetor unitário. Pelas observações preliminares $(A_{11}^\lambda, b_\lambda)$ é estruturalmente atingível e os parâmetros podem ser escolhidos de

forma que (A_{11}^*, b^*) e (A_{22}^*, B_2^*) são atingíveis e A_{11}^* e A_{22}^* não têm valores próprios em comum.

Note-se que $A_{12}^* = b^* e^\top$ é uma concretização possível para A_{12}^λ .

Visto que (A_λ, B_λ) não é estruturalmente atingível, existe um $\mu \in \mathbb{C}$ e $(x_1^\top, x_2^\top) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ satisfazendo as seguintes condições (1.6) e (1.7)

$$(x_1^\top, x_2^\top) \begin{bmatrix} A_{11}^* & b^* e^\top \\ 0 & A_{22}^* \end{bmatrix} = \mu (x_1^\top, x_2^\top), \quad (1.6)$$

$$(x_1^\top, x_2^\top) \begin{bmatrix} 0 \\ B_2^* \end{bmatrix} = 0, \quad (1.7)$$

isto é,

$$x_1^\top * A_{11}^* = \mu x_1^\top, \quad (1.8)$$

$$x_1^\top b^* e^\top + x_2^\top A_{22}^* = \mu x_2^\top, \quad (1.9)$$

$$x_2^\top B_2^* = 0. \quad (1.10)$$

Se $x_1 = 0$, como (A_{22}^*, B_2^*) é atingível, (1.9) e (1.10) implicam $x_2 = 0$ o que é uma contradição.

Por isso, assumamos que $x_1 \neq 0$. Então, por (1.8), x_1^\top é um vetor próprio à esquerda de A_{11}^* e μ é um valor próprio de A_{11}^* . Portanto, $x_1^\top b^* \neq 0$ já que (A_{11}^*, b^*) é atingível.

Além disso $(\mu I - A_{22}^*)$ é não singular, pois A_{11}^* e A_{22}^* não têm valores próprios em comum. Portanto, de (1.9) e (1.10) resulta que

$$x_2^\top = x_1^\top b^* e^\top (\mu I - A_{22}^*)^{-1}$$

e

$$x_1^\top b^* e^\top (\mu I - A_{22}^*)^{-1} B_2^* = 0$$

Agora, como $x_1^\top b^* \neq 0$ é um escalar, temos que

$$e^\top (\mu I - A_{22}^*)^{-1} B_2^* = 0. \quad (1.11)$$

Suponhamos agora que se repete o argumento acima com outra caracterização para $(A_{11}^\lambda, b_\lambda)$, de tal forma que o par é atingível e nenhum dos valores próprios de A_{11}^λ coincide com os valores próprios de A_{11}^* ou de A_{22}^* .

Assim, (1.11) será agora válida para outro valor de μ e procedendo desta forma podemos encontrar n valores distintos de μ que satisfazem (1.11).

Visto que (1.11) é equivalente a uma equação polinomial em μ de grau inferior a n , e é satisfeita em n pontos distintos, então tem que ser satisfeita para todos os μ que não são valores próprios de A_{22}^* . Isto implica pelo Teorema 1.2.4 que (A_{22}^*, B_2^*) não é atingível, o que é uma contradição. Portanto (A_λ, B_λ) é estruturalmente atingível.

- 2) Agora assumamos que A_{11}^λ está na forma I. Então, por [13], existe uma matriz de permutação P tal que

$$PA_\lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11}^\lambda & \bar{A}_{12}^\lambda & \cdots & \bar{A}_{1v}^\lambda & \bar{A}_{1,v+1}^\lambda \\ 0 & \bar{A}_{22}^\lambda & \cdots & \bar{A}_{2v}^\lambda & \bar{A}_{2,v+1}^\lambda \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \bar{A}_{vv}^\lambda & \bar{A}_{v,v+1}^\lambda \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_{22}^\lambda \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad PB_\lambda = \begin{bmatrix} \bar{B}_1^\lambda \\ \bar{B}_2^\lambda \\ \vdots \\ \bar{B}_v^\lambda \\ B_2^\lambda \end{bmatrix},$$

onde \bar{A}_{ii}^λ é uma matriz quadrada com característica genérica máxima e não está na forma I. Visto que $\left(A_{11}^\lambda, \begin{bmatrix} A_{12}^\lambda & B_1^\lambda \end{bmatrix}\right)$ é assumido como sendo um par estruturalmente atingível, os subsistemas

$$\sum_i = (\bar{A}_{ii}^\lambda, (\bar{A}_{i,i+1}^\lambda, \dots, \bar{A}_{i,v+1}^\lambda, \bar{B}_i^\lambda))$$

serão estruturalmente atingíveis. Portanto, pela parte 1) do lema, o subsistema

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_{vv}^\lambda & \overline{A}_{v,v+1}^\lambda \\ 0 & \overline{A}_{22}^\lambda \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} \overline{B}_v^\lambda \\ B_\lambda \end{bmatrix}$$

será estruturalmente atingível.

Procedendo desta forma podemos incluir os outros blocos de A_{11}^λ da seguinte maneira: no i -ésimo passo formamos a conexão em série/paralelo entre o subsistema estruturalmente atingível atual e o novo sistema, \sum_i , que satisfaz os requisitos da parte 1) (isto é, A_{ii}^λ tem característica genérica máxima e não está na forma I e \sum_i é estruturalmente atingível). Por isso, pela parte 1), o novo subsistema será estruturalmente atingível e portanto (A_λ, B_λ) será estruturalmente atingível.

Demonstração do Teorema 1.3.15 (continuação). Assuma-se que o par (A_λ, B_λ) não está na forma I nem na forma II. Então, pelo Lema 1.3.17, existe uma matriz de permutação $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$\overline{A}_\lambda = PA_\lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^\lambda & A_{12}^\lambda \\ A_{21}^\lambda & A_{22}^\lambda \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \overline{B}_\lambda = PB_\lambda = \begin{bmatrix} B_1^\lambda \\ B_2^\lambda \end{bmatrix},$$

onde $A_{11}^\lambda \in \mathbb{R}^{q \times q}$, com $1 \leq q \leq n-1$, e $A_{22}^\lambda \in \mathbb{R}^{(n-q) \times (n-q)}$. Pelo Lema 1.3.17, temos duas possibilidades:

- a) escolham-se os parâmetros livres em $(\overline{A}_\lambda, \overline{B}_\lambda)$ de modo a que o par de matrizes admissíveis (A^*, B^*) esteja de acordo com a parte ii) do referido lema. Então,

$$\rho \left(\begin{bmatrix} 0 & A_{12}^* & 0 \\ 0 & A_{22}^* & B_2^* \end{bmatrix} \right) = n$$

e todos os valores próprios de A_{22}^λ são zero. Então o sistema (A^*, B^*) é

atingível, visto que $\text{rank} \begin{bmatrix} \mu I - A^* & B^* \end{bmatrix} = n$, para todos os μ que sejam valores próprios de A^* . Logo (A_λ, B_λ) é estruturalmente atingível.

b) escolham-se os parâmetros livres em $(A_{22}^\lambda, B_2^\lambda)$ de modo a que o par de matrizes admissíveis (A_{22}^*, B_2^*) fique de acordo com a parte *ii*) do Lema 1.3.17. Portanto,

$$\rho \left(\begin{bmatrix} A_{11}^\lambda & A_{12}^\lambda & B_1^\lambda \\ 0 & A_{22}^* & B_2^* \end{bmatrix} \right) = n$$

e todos os valores próprios de A_{22}^λ são zeros e $\rho(A_{11}^\lambda) = q$. O par (A_{22}^*, B_2^*) é atingível pois $\text{rank} \begin{bmatrix} \mu I - A_{22}^* & B_2^* \end{bmatrix} = n - q$ para todos os μ que sejam os valores próprios de A_{22}^λ , isto é, $\mu = 0$.

Como (A_λ, B_λ) não está na forma I, o par $\left(A_{11}^\lambda, \begin{bmatrix} A_{12}^\lambda & B_1^\lambda \end{bmatrix} \right)$ também não está na forma I pelo Lema 1.3.16.

Consequentemente, visto que $q < n$, pela hipótese indutiva, $\left(A_{11}^\lambda, \begin{bmatrix} A_{12}^\lambda & B_1^\lambda \end{bmatrix} \right)$ é estruturalmente atingível e pelo Lema 1.3.18

$$\left(\begin{bmatrix} A_{11}^\lambda & A_{12}^\lambda \\ 0 & A_{22}^\lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} B_1^\lambda \\ B_2^\lambda \end{bmatrix} \right)$$

é estruturalmente atingível, logo (A_λ, B_λ) é estruturalmente atingível.

□

Capítulo 2

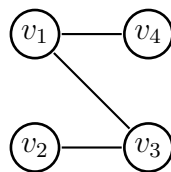
Grafos e Sistemas

Os sistemas estruturados, introduzidos no capítulo anterior, podem ser representados usando grafos orientados e as suas propriedades genéricas, nomeadamente a atingibilidade, têm caracterizações elegantes e fáceis de verificar usando esta abordagem da teoria de grafos.

2.1 Generalidades sobre grafos

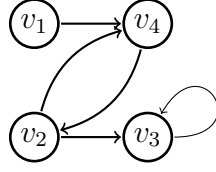
Definição 2.1.1. Um *grafo (não) orientado* $\mathcal{G}(V, E)$ consiste num conjunto finito e não vazio V de elementos chamados *vértices* e num conjunto finito $E \subset V \times V$ de pares (não) ordenados de elementos de V chamados *arestas*.

Exemplo 2.1.2. Um grafo não orientado com vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e arestas $E = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_4\}, \{v_2, v_3\}\}$ é representado pelo diagrama:



◇

Exemplo 2.1.3. O diagrama



representa um grafo orientado com vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ e arestas $E = \{(v_1, v_4), (v_2, v_4), (v_4, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_3)\}$. \diamond

Daqui em diante iremos apenas considerar grafos orientados, pois será este tipo de grafos que se enquadra no âmbito deste trabalho. Assim designaremos grafo orientado apenas por grafo.

Definição 2.1.4. Um *subgrafo* de um grafo $\mathcal{G}(V, E)$ é um grafo $\mathcal{G}(V', E')$ com $V' \subset V$ e $E' \subset E \cap V' \times V'$.

Definição 2.1.5. Dado um grafo $\mathcal{G}(V, E)$, se associarmos a cada aresta a_{ij} um número c_{ij} , chamado *peso* da aresta, ao grafo $\mathcal{G}(V, E)$ chamamos um *grafo com pesos*.

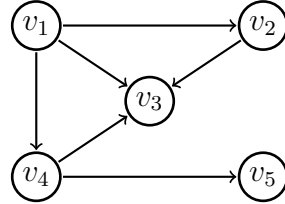
As noções clássicas de caminho e ciclo são apresentadas a seguir.

Definição 2.1.6. Chamamos *caminho* de um grafo $\mathcal{G}(V, E)$, com *vértice inicial* v_0 e *vértice terminal* v_t , a uma sequência de arestas $(v_{i-1}, v_i) \in E$, com $i = 1, \dots, t$, que denotamos por $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_t$. Se os vértices forem todos distintos, dizemos que o caminho é *simples*.

Definição 2.1.7. Chamamos *ciclo* a um caminho $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_t \rightarrow v_0$ onde $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_t$ é um caminho simples. Um *lacete* é um ciclo com uma única aresta.

Exemplo 2.1.8. No grafo do exemplo 2.1.3, $v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2$ e $v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_3$ são caminhos, sendo o primeiro simples. Por outro lado, $v_2 \rightarrow v_4 \rightarrow v_2$ é um ciclo e $v_3 \rightarrow v_3$ é um lacete. \diamond

Exemplo 2.1.9. No grafo seguinte não existem ciclos



◇

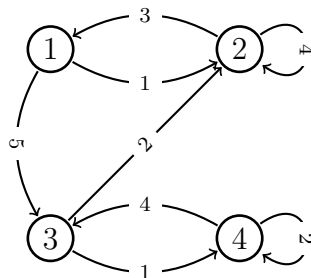
Dada uma matriz quadrada podemos associar-lhe um grafo como se define a seguir. Este grafo será usado na secção seguinte.

Definição 2.1.10. Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$. O *grafo de Coates* associado à matriz A , denotado por $\mathcal{G}_c(A)$, é um grafo orientado com pesos onde, se $a_{ij} \neq 0$ então existe uma aresta orientada do vértice j para o vértice i com peso a_{ij} , para $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Exemplo 2.1.11. O grafo de Coates associado à matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

é representado por



◇

2.2 Grafo de um sistema estruturado

Os sistemas estruturados introduzidos no capítulo anterior podem ser representados por grafos como se define a seguir.

Definição 2.2.1. Seja $(A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda)$ um sistema estruturado onde $A_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C_\lambda \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $D_\lambda \in \mathbb{R}^{p \times m}$. O grafo deste sistema estruturado é definido por:

- um conjunto de vértices $V = U \cup X \cup Y$, onde
 $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ são as *origens*,
 $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ são os *vértices de estado*,
 $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ são as *saídas*;
- um conjunto de arestas $E = E_A \cup E_B \cup E_C \cup E_D$, onde
 $E_A = \{(x_j, x_i) : a_{ij}^\lambda \neq 0\}$, $E_B = \{(u_j, x_i) : b_{ij}^\lambda \neq 0\}$,
 $E_C = \{(x_j, y_i) : c_{ij}^\lambda \neq 0\}$, $E_D = \{(u_j, y_i) : d_{ij}^\lambda \neq 0\}$,

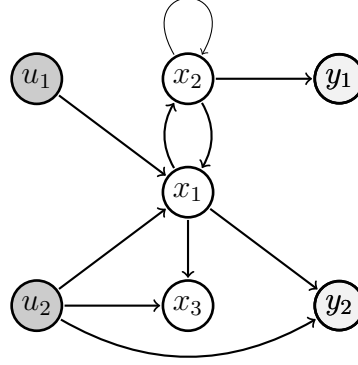
onde (v, v') representa a aresta orientada do vértice $v \in V$ para o vértice $v' \in V$ e $m_{ij}^\lambda \neq 0$ significa que a entrada (i, j) da matriz M_λ é um parâmetro livre.

Denotaremos o grafo de um sistema estruturado por $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda)$, ou simplesmente por \mathcal{G} .

Exemplo 2.2.2. Consideremos o sistema estruturado $(A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda)$ descrito pelas seguintes matrizes

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_5 & \lambda_6 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_7 \end{bmatrix}, C_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_8 & 0 \\ \lambda_9 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } D_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{10} \end{bmatrix}.$$

O grafo \mathcal{G} associado a este sistema é dado por:



◇

De forma análoga ao que foi feito no capítulo anterior, daqui em diante iremos apenas considerar sistemas estruturados (A_λ, B_λ) .

Nota 2.2.3. Consideremos o sistema estruturado (A_λ, B_λ) , onde $A_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dadas duas matrizes A^* e B^* admissíveis em relação a A_λ e B_λ , respetivamente, seja L a matriz de ordem $m + n$ definida por

$$L = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então o grafo $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$ pode ser encarado como o grafo de Coates da matriz L (mas sem pesos nas arestas).

A noção de vértice acessível apresentada a seguir é essencial no estudo dos sistemas estruturados usando a teoria de grafos.

Definição 2.2.4. Chamamos *caule* a um caminho simples cujo vértice inicial é uma origem.

Definição 2.2.5. Dizemos que um vértice é *acessível* se for o vértice terminal de um caule. Caso contrário, diz-se *inacessível*.

Exemplo 2.2.6. No grafo anterior temos, por exemplo, os caules $u_1 \rightarrow x_1$, $u_2 \rightarrow x_3$ e $u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$. Consequentemente, todos os vértices de estado são acessíveis.

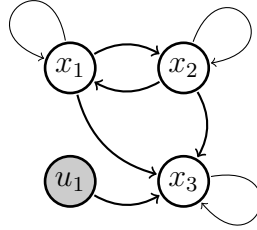
◇

No exemplo seguinte veremos um grafo no qual existem vértices de estado inacessíveis.

Exemplo 2.2.7. Consideremos as seguintes matrizes estruturadas

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\ \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 \end{bmatrix} \text{ e } B_\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_8 \end{bmatrix}.$$

O grafo associado ao sistema estruturado (A_λ, B_λ) é dado por:



Os vértices x_1 e x_2 são inacessíveis, uma vez que não existe nenhum caule com vértice terminal x_1 ou x_2 . \diamond

No capítulo anterior foram introduzidos os conceitos de um par de matrizes estar na forma I ou na forma II. Estes conceitos serão agora caracterizados usando a teoria de grafos. No que se segue sejam $A_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e $B_\lambda \in \mathbb{R}^{n \times m}$ matrizes estruturadas.

Lema 2.2.8. [10] O par (A_λ, B_λ) não está na forma I se e só se todos os vértices de estado do grafo associado ao par estruturado (A_λ, B_λ) forem acessíveis.

Demonstração. Se o par (A_λ, B_λ) estiver na forma I, isto é, se existir uma matriz de permutação $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

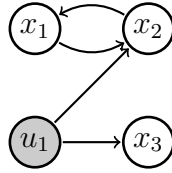
$$PA_\lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^\lambda & 0 \\ A_{21}^\lambda & A_{22}^\lambda \end{bmatrix} \text{ e } PB_\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2^\lambda \end{bmatrix},$$

onde $A_{22}^\lambda \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, com $0 < n_2 < n$, então temos que existem pelo menos n_2 vértices inacessíveis. Por outro lado, sem perda de generalidade, suponhamos que os vértices v_1, v_2, \dots, v_k são vértices inacessíveis e v_{k+1}, \dots, v_n são acessíveis. Então, na matriz A_λ , todas as entradas a_{ij} , com $i = 1, 2, \dots, k$ e $j = k+1, k+2, \dots, n$, são nulas e na matriz B_λ todas as entradas b_{ij} , com $i = 1, 2, \dots, k$ e $j = 1, 2, \dots, m$, também são nulas e, portanto, o par (A_λ, B_λ) está na forma I. \square

Exemplo 2.2.9. O grafo associado ao sistema estruturado (A_λ, B_λ) com

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}$$

é dado por



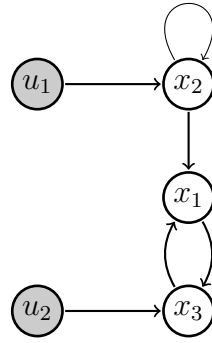
Como todos os vértices de estado são acessíveis podemos concluir, pelo Lema 2.2.8, que o par (A_λ, B_λ) não está na forma I. \diamond

Exemplo 2.2.10. No exemplo 2.2.7, o grafo tinha dois vértices inacessíveis e, portanto, pelo lema anterior podemos concluir que o par (A_λ, B_λ) está na forma I. \diamond

Para obter uma caracterização, usando a teoria de grafos, sobre um par estruturado estar ou não na forma II, será necessário introduzir os seguintes conceitos.

Definição 2.2.11. Dizemos que dois caminhos são *disjuntos* se forem compostos por dois conjuntos de vértices disjuntos. A um conjunto (podendo ser vazio) de caminhos mutualmente disjuntos chamamos uma *família de caminhos*. As noções de *família de ciclos* e *família de caules* são definidas de forma análoga.

Exemplo 2.2.12. No grafo



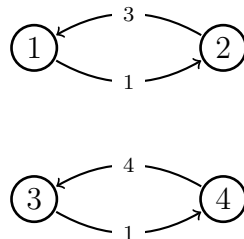
temos que os ciclos $x_2 \rightarrow x_2$ e $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$ formam uma família de ciclos e os caules $u_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ e $u_2 \rightarrow x_3$ formam uma família de caules. \diamond

Definição 2.2.13. Dizemos que um subgrafo \mathcal{H} do grafo \mathcal{G} *gera* \mathcal{G} se \mathcal{H} contém todos os vértices de \mathcal{G} .

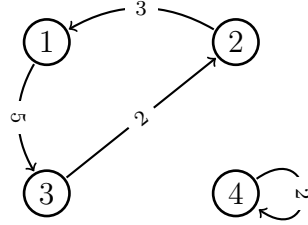
Definição 2.2.14. A uma família de ciclos cuja união de todos os ciclos gera \mathcal{G} chamamos um *fator* em \mathcal{G} .

Sejam \mathcal{G} um grafo com pesos e \mathcal{H} um subgrafo de \mathcal{G} . Denotaremos por $f(\mathcal{H})$ o produto dos pesos de todas as arestas contidas em \mathcal{H} .

Exemplo 2.2.15. No grafo do exemplo 2.1.11, temos o fator \mathcal{F}_1 representado por



com $f(\mathcal{F}_1) = 12$, e o fator \mathcal{F}_2 representado por



com $f(\mathcal{F}_2) = 60$. ◇

Definição 2.2.16. A uma união de uma família de caules e de uma família de ciclos sem vértices em comum chamamos uma *conexão fatorial com origem em U* .

Exemplo 2.2.17. No grafo do exemplo 2.2.12, a união do caule $u_1 \rightarrow x_2$ e do ciclo $x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$ forma uma conexão fatorial com origem em U . ◇

O seguinte lema é um resultado clássico da teoria de grafos e a sua demonstração pode ser encontrada em [2].

Lema 2.2.18. *Seja $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e seja $\mathcal{G}_c(M)$ o seu grafo de Coates. Então*

$$\det M = (-1)^n \sum_{\mathcal{F}} (-1)^{k_{\mathcal{F}}} f(\mathcal{F})$$

onde \mathcal{F} é um fator em $\mathcal{G}_c(M)$ e $k_{\mathcal{F}}$ é o número de ciclos em \mathcal{F} .

Estamos agora em condições de estabelecer uma caracterização sobre um par de matrizes estruturadas estar (ou não) na forma II.

Lema 2.2.19. [10] *O par $(A_{\lambda}, B_{\lambda})$ não está na forma II se e só se existir em \mathcal{G} uma conexão fatorial com origem em U que contenha todos os vértices de estado.*

Demonstração. Suponhamos que o par (A_λ, B_λ) não está na forma II, ou seja, $\rho\left(\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}\right) = n$. Sem perda de generalidade, suponhamos ainda que $\rho(B_\lambda) = m$. Fixando os parâmetros livres, podemos obter as matrizes admissíveis A^* e B^* tais que $\rho\left(\begin{bmatrix} A^* & B^* \end{bmatrix}\right) = n$ e $\rho(B^*) = m$. Escolham-se as colunas i_1, \dots, i_m de A^* , com $i_j \in \{1, \dots, n\}$ para $j \in \{1, \dots, m\}$, tais que as restantes colunas de A^* e todas as colunas de B^* sejam independentes e construa-se a matriz L^* do seguinte modo:

$$L^* = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ e_{i_1}^\top & 0 \\ \vdots & \vdots \\ e_{i_m}^\top & 0 \end{bmatrix} \text{ onde } e_{i_j}^\top = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \underbrace{1}_{i_j\text{-ésima posição}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Seja $\mathcal{G}_c(L^*)$ o grafo de Coates de L^* . É evidente que $\det L^* \neq 0$, logo pelo Lema 2.2.18 podemos concluir que existe um fator \mathcal{F} em $\mathcal{G}_c(L^*)$. Note-se que o grafo $\mathcal{G}_c(L^*)$ pode ser visto como um grafo obtido a partir de $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$ atribuindo pesos às arestas de acordo com os valores fixados em A^* e B^* e adicionando arestas de peso 1 do vértice x_{i_j} para o vértice u_j , para $j = 1, 2, \dots, m$. Logo, se apagarmos todas estas arestas de peso 1 de \mathcal{F} , encontramos uma conexão fatorial com origem em U em $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$ que contém todos os vértices de estado.

Suponhamos agora que existe uma conexão fatorial com origem em U em $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$ que contém todos os vértices de estado e denotemos essa conexão por \mathcal{H} . Fixemos os parâmetros livres a que correspondem as arestas em \mathcal{H} tais que $f(\mathcal{H}) \neq 0$ e fixemos os restantes parâmetros livres em A_λ e B_λ como sendo zero. Sejam A^* e B^* as matrizes admissíveis obtidas pela fixação acima descrita. Seja x_{i_j} o vértice final do caule cujo vértice inicial é u_j , para $1 \leq j \leq m$ e construa-se o subgrafo $\overline{\mathcal{H}}$ a partir de \mathcal{H} adicionando arestas de

peso 1 de x_{i_j} para u_j , para $1 \leq j \leq m$. Então $\overline{\mathcal{H}}$ é o grafo de Coates da matriz

$$L^* = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ e_{i_1}^\top & 0 \\ \vdots & \vdots \\ e_{i_m}^\top & 0 \end{bmatrix}.$$

Como \mathcal{H} é o único fator em $\mathcal{G}_c(L)$ e $f(\mathcal{H}) \neq 0$, então $\det(L^*) \neq 0$ pelo Lema 2.2.18. Portanto, tem-se que $\rho\left(\begin{bmatrix} A^* & B^* \end{bmatrix}\right) = n$ e isto implica que $\rho\left(\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}\right) = n$, isto é, o par (A_λ, B_λ) não está na forma II. \square

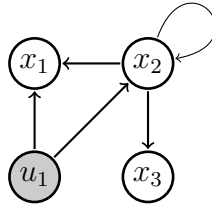
Exemplo 2.2.20. Consideremos as seguintes matrizes estruturadas

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O par (A_λ, B_λ) está na forma II pois

$$\rho([A_\lambda \ B_\lambda]) = \rho\left(\begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \lambda_5 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

Note-se que o grafo do sistema estruturado (A_λ, B_λ) é:



que não admite uma união de uma família de caules e uma família de ciclos sem vértices em comum que contenha todos os vértices de estado. De facto, as únicas famílias de ciclos neste grafo são $\mathcal{F}_1 = \emptyset$ e $\mathcal{F}_2 = \{x_2 \rightarrow x_2\}$. Claramente não existe nenhuma família de caules \mathcal{S} satisfazendo

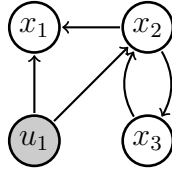
$$\mathcal{F}_i \cap \mathcal{S} = \emptyset \text{ e } X = \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq \mathcal{F}_i \cup \mathcal{S},$$

para $i = 1$ ou $i = 2$. ◇

Exemplo 2.2.21. Consideremos as matrizes estruturadas

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A característica (genérica) de $\begin{bmatrix} A_\lambda & B_\lambda \end{bmatrix}$ é 3, logo o par (A_λ, B_λ) não está na forma II. O grafo associado é o seguinte:



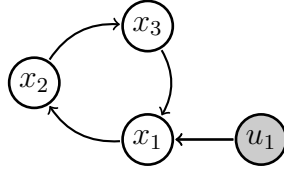
A união do caule $u_1 \rightarrow x_1$ e do ciclo $x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$ não tem vértices em comum, constituindo assim uma conexão fatorial com origem em U , e contém todos os vértices de estado. ◇

Vimos no Teorema 1.3.15 que o sistema estruturado $x(t+1) = A_\lambda x(t) + B_\lambda u(t)$ era atingível se e só se o par (A_λ, B_λ) não estivesse nem na forma I nem na forma II.

Iremos agora apresentar um resultado análogo usando a teoria de grafos. Para esse efeito é necessário introduzir primeiro os seguintes conceitos.

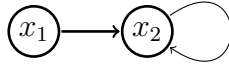
Definição 2.2.22. Num grafo de um sistema estruturado, chamamos *reberto* a um ciclo em X com uma aresta adicional e que termina, mas não começa, num vértice do ciclo. À aresta e chamamos *aresta distinta* do rebento.

Exemplo 2.2.23. No rebento



temos que (u_1, x_1) é a sua aresta distinta. \diamond

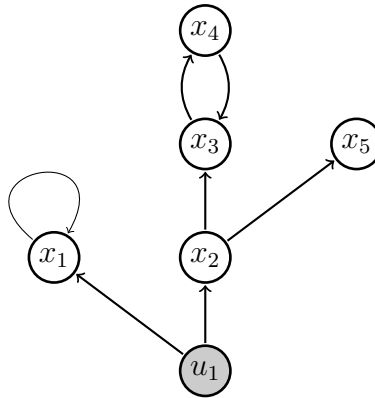
Exemplo 2.2.24. A aresta distinta do seguinte rebento é a aresta (x_1, x_2)



\diamond

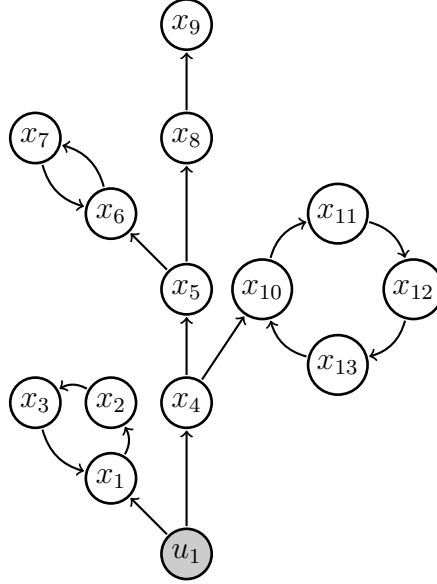
Definição 2.2.25. Dizemos que um grafo \mathcal{G} é um *cato* se existe um caule \mathcal{S}_0 e existem rebentos $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s$, com $s \in \mathbb{N}$, tais que $\mathcal{G} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_s$ e, para cada $i = 1, \dots, s$, o vértice inicial da aresta distinta de \mathcal{B}_i não for o vértice terminal de \mathcal{S}_0 e for o único vértice que pertence a \mathcal{B}_i e a $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{i-1}$ (onde, para $i = 1$, $\mathcal{S}_0 \cup \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_{i-1}$ é substituído apenas por \mathcal{S}_0). A um conjunto disjunto de catos chamamos *cati*.

Exemplo 2.2.26. O grafo seguinte é um cato com caule $\mathcal{S}_0 : u_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_5$ e rebentos $\mathcal{B}_1 : u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_1$ e $\mathcal{B}_2 : x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3$.



\diamond

Exemplo 2.2.27. Outro exemplo de um cato é o seguinte grafo



com caule $\mathcal{S}_0 : u_1 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 \rightarrow x_8 \rightarrow x_9$ e rebentos $\mathcal{B}_1 : u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$, $\mathcal{B}_2 : x_4 \rightarrow x_{10} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{12} \rightarrow x_{13} \rightarrow x_{10}$ e $\mathcal{B}_3 : x_5 \rightarrow x_6 \rightarrow x_7 \rightarrow x_6$. \diamond

Definição 2.2.28. Seja $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$ uma matriz $n \times (n+1)$ e seja $\mathcal{G}_c(A, b)$ o seu grafo de Coates cujo conjunto de vértices é $V = \{x_1, \dots, x_n, u\}$. Para cada vértice $x_i \in V$, à conexão fatorial com origem u de $\mathcal{G}_c(A, b)$ que contém o caule com vértice inicial u e vértice final x_i chamamos *conexão fatorial* (u, x_i) .

Denotamos a submatriz $n \times n$ de $\begin{bmatrix} b & A \end{bmatrix}$ obtida apagando a coluna i de A por $\begin{bmatrix} b & A \end{bmatrix}^{<i}$. O seguinte lema foi apresentado em [14] e é uma consequência do Lema 2.2.18.

Lema 2.2.29. *Seja $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ e seja \mathcal{G}_c o grafo de Coates de $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix}$. Então*

$$\det \begin{bmatrix} b & A \end{bmatrix}^{<i>i</i> = \sum_{\mathcal{F} \in \phi(u, x_i)} (-1)^{k_{\mathcal{F}}} f(\mathcal{F}) (-1)^{n-i}$$

onde \mathcal{F} é um fator em \mathcal{G}_c , $\phi(u, x_i)$ é o conjunto de todas as conexões fatoriais (u, x_i) , $f(\mathcal{F})$ é o produto dos pesos de todas as arestas de \mathcal{F} e $k_{\mathcal{F}}$ é o número de ciclos em \mathcal{F} .

Iremos agora enunciar e demonstrar o principal resultado deste capítulo onde se estabelece que um sistema estruturado é estruturalmente atingível se e só se o seu grafo é gerado por um cato.

Teorema 2.2.30. *[10] As seguintes condições são equivalentes:*

- a) *O sistema estruturado (A_λ, B_λ) é estruturalmente atingível;*
- b) *O par (A_λ, B_λ) não está nem na forma I nem na forma II;*
- c) *Existe um cato que gera $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$.*

Demonstração. a) \Leftrightarrow b) foi provado no Teorema 1.3.15.

b) \Rightarrow c) Suponhamos que b) é satisfeita. Então, pelo Lema 2.2.19, existe em $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$ uma conexão fatorial com origem em U que contém todos os vértices de estado, denotada por \mathcal{H} . Por outro lado, como o par (A_λ, B_λ) não está na forma I, pelo Lema 2.2.8, todos os vértices de estado de $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$ são acessíveis.

Consideremos um cato \mathcal{C}_i e os ciclos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_h$ mutualmente disjuntos de tal modo que $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_h$ gera $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$. Então, como todos os vértices de estado de $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$ são acessíveis, existe uma aresta e em $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$ cujo vértice inicial está contido em \mathcal{C}_i e cujo vértice final está contido num certo ciclo \mathcal{F}_s , com $s = 1, \dots, h$.

Assim, $\mathcal{F}_s \cup \{e\}$ constitui um rebento e e é a aresta distinta desse rebento. Se o vértice inicial de e coincide com o vértice final de algum caule em \mathcal{C}_i , toma-se \mathcal{C}_{i+1} como sendo o subgrafo $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{F}_s \cup \{e\} - \{g\}$, onde g é a aresta de \mathcal{F}_s tal que o vértice final de g e e coincidem. Caso contrário, seja \mathcal{C}_{i+1} o subgrafo $\mathcal{C}_i \cup \mathcal{F}_s \cup \{e\}$.

Em ambos os casos é evidente que \mathcal{C}_{i+1} é um cato maior do que \mathcal{C}_i , que $\mathcal{C}_{i+1}, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{s-1}, \mathcal{F}_{s+1}, \dots, \mathcal{F}_h$ são mutuamente disjuntos e que $\mathcal{C}_{i+1} \cup \mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_{s-1} \cup \mathcal{F}_{s+1} \cup \dots \cup \mathcal{F}_h$ gera $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$.

Seja \mathcal{S}_0 a união de todos os caules e sejam $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_q$ os ciclos da conexão fatorial \mathcal{H} com origem em U .

Então, aplicando iterativamente o procedimento acima, podemos construir uma sequência de catos, $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \dots \subset \mathcal{C}_q$ e, claramente, \mathcal{C}_q gera $\mathcal{G}(A_\lambda, B_\lambda)$, o que prova $b) \Rightarrow c)$.

$c) \Rightarrow a)$ Para provar esta implicação usaremos a prova apresentada em [14].

Note-se que é suficiente provar esta implicação para sistemas de uma única entrada, uma vez que o caso de múltiplas entradas é simplesmente uma união de alguns sistemas independentes com uma única entrada. Suponhamos que o grafo $\mathcal{G}(A_\lambda, b_\lambda)$ é gerado por um cato. Fixemos os valores dos parâmetros de $\begin{bmatrix} A_\lambda & b_\lambda \end{bmatrix}$ de tal modo que: cada aresta dos caules e as arestas distintas dos rebentos têm peso 1, todos os ciclos do cato têm pesos mutuamente distintos e todas as arestas que não pertencem ao cato têm peso 0. Denotemos a matriz associada por $\begin{bmatrix} A^* & b^* \end{bmatrix}$. Para mostrar que o sistema (A^*, b^*) é atingível iremos mostrar, pelo Teorema 1.2.4, que

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mu I - A^* & b^* \end{bmatrix} = n, \text{ para todo } \mu \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Primeiro consideremos o ciclo \mathcal{F}_0 de $\mathcal{G}(A^*, b^*)$ constituído pelos vértices $\{x_s, x_{s+1}, \dots, x_t\}$ onde x_s é o vértice final de uma aresta distinta. Deno-

taremos por \mathcal{S}_{u,x_t} o caule de $\mathcal{G}(A^*, b^*)$ com vértice inicial u e vértice final x_t . Consideremos $\mathcal{G}(A_0^*, b_0^*)$ como sendo o subgrafo de $\mathcal{G}(A^*, b^*)$ gerado por \mathcal{S}_{u,x_t} e pelos ciclos que têm pelo menos um vértice em comum com \mathcal{S}_{u,x_t} . Além disso, seja $\mathcal{G}(\bar{A}^*)$ o subgrafo de $\mathcal{G}(A^*, b^*)$ gerado pelos vértices que não são vértices de $\mathcal{G}(A_0^*, b_0^*)$.

Então, rearranjando adequadamente os índices dos vértices de $\mathcal{G}(A^*, b^*)$, a matriz $\begin{bmatrix} b^* & \mu I - A^* \end{bmatrix}$ pode ser escrita como uma matriz triangular inferior por blocos onde os blocos da diagonal são

$$\left(\begin{bmatrix} b_0^* & \mu I - A_0^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu I - A_1^* \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} \mu I - A_j^* \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mu I - T^* \end{bmatrix} \right), \quad (2.2)$$

onde A_i^* , $i = 1, 2, \dots, j$, são as matrizes associadas aos ciclos \mathcal{F}_i e T^* é a matriz associada à parte do caule \mathcal{S}_{u,x_t} que está incluída no grafo $\mathcal{G}(\bar{A}^*)$.

Vamos agora mostrar que (2.1) é válida. Se μ não for valor próprio de A^* é imediato. Caso μ seja valor próprio de A^* temos um dos seguintes casos:

- i) μ é valor próprio de A_i^* para algum $i = 0, 1, \dots, j$;
- ii) $\mu = 0$, que é valor próprio de T^* .

Caso se verifique i), podemos assumir que este ciclo é \mathcal{F}_0 . Note-se que μ é solução de $\mu^{j(\mathcal{F}_0)} - f(\mathcal{F}_0) = 0$, onde $j(\mathcal{F}_0)$ representa o número de arestas do ciclo \mathcal{F}_0 e, conseqüentemente, é não nulo. Para além disso, existe apenas uma conexão fatorial (u, x_t) em $\mathcal{G}(\mu I - A_0^*, b_0^*)$, que consiste em \mathcal{S}_{u,x_t} e lacetes de peso $-\mu$ associados a cada vértice de $\mathcal{G}(A_0^*, b_0^*)$ que não seja um vértice de \mathcal{S}_{u,x_t} .

Então, pelo Lema 2.2.29, temos

$$\det \begin{bmatrix} b_0^* & \mu I - A_0^* \end{bmatrix}^{<t} = \pm(-\mu)^k f(\mathcal{S}_{u,x_t}) \neq 0 \quad (2.3)$$

onde k é o número de vértices com lacetes. Como μ é um valor próprio de A^* de multiplicidade algébrica 1, por (2.2), temos que

$$\det \begin{bmatrix} b^* & \mu I - A^* \end{bmatrix}^{<t} \neq 0. \quad (2.4)$$

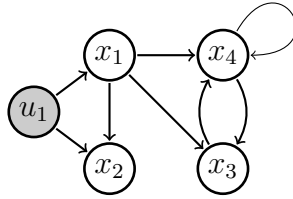
Caso se verifique *ii*), seja x_t o vértice final de \mathcal{S}_{u,x_t} . Então, provamos a desigualdade (2.4) exatamente da mesma forma que o caso anterior.

Portanto o sistema (A^*, b^*) é atingível, o que implica por definição que o sistema estruturado (A_λ, b_λ) é estruturalmente atingível. \square

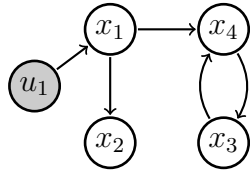
Exemplo 2.2.31. Consideremos as matrizes estruturadas

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_7 \\ \lambda_8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O grafo do sistema estruturado (A_λ, B_λ) é



e é gerado pelo cato



com caule $\mathcal{S}_0 : u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2$ e rebento $\mathcal{B}_1 : x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$.

Pelo Teorema 2.2.30, o sistema estruturado (A_λ, B_λ) é estruturalmente atingível. Podemos, alternativamente, verificar esse facto através do cálculo da característica (genérica) da matriz de atingibilidade deste sistema:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4(A_\lambda, B_\lambda) &= \begin{bmatrix} B_\lambda & A_\lambda B_\lambda & A_\lambda^2 B_\lambda & A_\lambda^3 B_\lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_7 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_8 & \lambda_1 \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \lambda_7 & \lambda_3 \lambda_4 \lambda_7 & (\lambda_2 \lambda_5 + \lambda_4 \lambda_6) \lambda_3 \lambda_7 \\ 0 & \lambda_4 \lambda_7 & (\lambda_2 \lambda_5 + \lambda_4 \lambda_6) \lambda_7 & (\lambda_3 \lambda_4 \lambda_5 + (\lambda_2 \lambda_5 + \lambda_4 \lambda_6) \lambda_6) \lambda_7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Considerando $\lambda^* = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

que tem característica 4 e, pelo Teorema 1.2.4, o sistema com esta matriz de atingibilidade é atingível, o que implica que o sistema estruturado (A_λ, B_λ) é estruturalmente atingível. \diamond

Exemplo 2.2.32. É fácil ver que os grafos dos exemplos 2.2.7 e 2.2.20 não são gerados por catos e também que os sistemas estruturados representados por esses grafos não são estruturalmente atingíveis. \diamond

Capítulo 3

Sistemas 2D

Neste capítulo começamos por introduzir sistemas 2D de acordo com o modelo Fornasini-Marchesini de espaço de estados e caracterizamos a atingibilidade local e global de tais sistemas. A seguir definimos sistemas 2D estruturados e usamos a teoria de grafos para estudar a sua atingibilidade global. Finalmente introduzimos os grafos 2D e aplicamos esse conceito para estudar a atingibilidade local de sistemas 2D positivos.

3.1 Modelo Fornasini-Marchesini

Uma das mais frequentes representações de sistemas 2D é o bem conhecido modelo Fornasini-Marchesini de espaço de estados [5]. Este modelo é uma generalização para o caso 2D da equação de estados de primeira ordem (1.4) referida no capítulo 1 e define-se da seguinte forma.

Definição 3.1.1. Um *sistema de espaço de estados 2D na forma Fornasini-Marchesini* é descrito pela seguinte equação matricial

$$\begin{aligned} x(i+1, j+1) = & A_1 x(i, j+1) + A_2 x(i+1, j) \\ & + B_1 u(i, j+1) + B_2 u(i+1, j) \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde $x(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}^n$ são denominados *estados locais*, $u(\cdot, \cdot) \in \mathbb{R}^m$ são as entradas, $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ são denominadas matrizes de estado e $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ são matrizes de entrada. Denotaremos este sistema 2D por (A_1, A_2, B_1, B_2) .

Introduzindo os *operadores de deslocamento* definidos por:

$$\begin{aligned}\sigma_1 x(i, j) &= x(i+1, j), \\ \sigma_2 x(i, j) &= x(i, j+1),\end{aligned}$$

a equação (3.1) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned}\sigma_1 x(i, j+1) &= A_1 x(i, j+1) + A_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1}(i, j+1) \\ &\quad + B_1 u(i, j+1) + B_2 \sigma_1 \sigma_2^{-1}(i, j+1).\end{aligned}$$

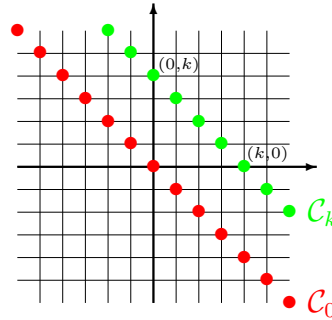
Se definirmos um novo operador $\sigma = \sigma_1 \sigma_2^{-1}$, então a equação anterior fica:

$$\sigma_1 x = (A_1 + A_2 \sigma) x + (B_1 + B_2 \sigma) u. \quad (3.2)$$

Definição 3.1.2. Chamamos *espaço de separação* \mathcal{C}_k , com $k \in \mathbb{Z}$, ao conjunto

$$\mathcal{C}_k = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : i + j = k\}.$$

Exemplo 3.1.3. Na figura seguinte estão representados dois exemplos de espaços de separação, \mathcal{C}_0 e \mathcal{C}_k para algum $k \in \mathbb{Z}$.



As condições iniciais para a equação (3.2) são atribuídas especificando os valores do estado sobre o espaço de separação \mathcal{C}_0 . Outros tipos de espaços de separação podem ser encontrados em [5].

Neste tipo de sistemas 2D é necessário fazer a distinção entre estados locais, isto é, os valores do estado num certo ponto (i, j) e os estados globais, que consistem na coleção de todos os estados locais ao longo de um espaço de separação.

Definição 3.1.4. Definimos o *estado global* sobre o conjunto de separação \mathcal{C}_k como sendo a coleção de estados locais:

$$\mathcal{X}_k(t) = (x(k+t, -t))_{t \in \mathbb{Z}}$$

e analogamente definimos a *entrada global* sobre o conjunto de separação \mathcal{C}_k como sendo a coleção de entradas:

$$\mathcal{U}_k(t) = (u(k+t, -t))_{t \in \mathbb{Z}}.$$

Pela equação (3.2), a evolução do estado global é dada por

$$\mathcal{X}_{k+1} = A(\sigma)\mathcal{X}_k + B(\sigma)\mathcal{U}_k, \quad (3.3)$$

onde $A(\sigma) = A_1 + A_2\sigma$, $B(\sigma) = B_1 + B_2\sigma$, e as ações de σ e σ_1 em \mathcal{X}_k são dadas por

$$\sigma\mathcal{X}_k(t) = (x(k+(t+1), -(t+1)))_{t \in \mathbb{Z}} = \mathcal{X}_k(t+1).$$

e por

$$\sigma_1\mathcal{X}_k(t) = (x(k+t+1, -t))_{t \in \mathbb{Z}} = \mathcal{X}_{k+1}(t).$$

Note-se que a ação de σ em \mathcal{U}_k é análoga, ou seja,

$$\sigma\mathcal{U}_k(t) = \mathcal{U}_k(t+1) \text{ e } \sigma_1\mathcal{U}_k(t) = \mathcal{U}_{k+1}(t).$$

Na secção seguinte iremos usar a transformada \mathcal{Z} de uma sequência. Os detalhes e propriedades da transformada \mathcal{Z} podem ser consultados em [8]. Iremos apenas apresentar a sua definição.

Denotemos por $\mathbb{R}[[z, z^{-1}]]$ o conjunto das séries formais de potências de Laurent bilaterais na indeterminada z com coeficientes em \mathbb{R} e por $(\mathbb{R})^{\mathbb{Z}}$ o conjunto das sequências em \mathbb{Z} que tomam valores em \mathbb{R} .

Definição 3.1.5. A transformada \mathcal{Z} , $\mathcal{Z}: (\mathbb{R})^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}[[z, z^{-1}]]$, é definida por

$$\mathcal{Z}[\mathcal{W}_k] = \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \mathcal{W}_k(t) z^{-t}$$

e será denotada por $W_k(z)$, com $k \in \mathbb{Z}$. Para vetores em $(\mathbb{R}^l)^{\mathbb{Z}}$ a transformada \mathcal{Z} é definida componente a componente.

Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[\sigma \mathcal{X}_k] &= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \sigma \mathcal{X}_k(t) z^{-t} \\ &= \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_k(t+1) z^{-t} \\ &= z \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_k(t+1) z^{-(t+1)} \\ &= z \sum_{t=-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}_k(t) z^{-t} \\ &= z X_k(z), \text{ onde } X_k(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{X}_k] \end{aligned}$$

e, por isso, aplicando a transformada \mathcal{Z} à equação (3.3), obtemos

$$X_{k+1}(z) = A(z)X_k(z) + B(z)U_k(z), \quad (3.4)$$

onde $A(z) = A_1 + A_2 z$, $B(z) = B_1 + B_2 z$ e $U_k(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{U}_k]$.

3.2 Atingibilidade local e global

Ao lidar com sistemas 2D, o conceito de atingibilidade é naturalmente introduzido em duas formas diferentes: um “fraco” (local) e outro “forte” (global), referindo-se, respetivamente, a estados locais individuais e a estados globais. Estas noções são definidas a seguir de acordo com [5].

Definição 3.2.1. O sistema 2D (3.1) é

- **localmente atingível** se, assumindo que $\mathcal{X}_0 \equiv 0$, para cada $x^* \in \mathbb{R}^n$ existe $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$, com $i + j > 0$, e uma sequência de entradas $u(\cdot, \cdot)$ tal que $x(i, j) = x^*$. Neste caso, dizemos que x^* é atingível em $i + j$ passos.
- **globalmente atingível** se, assumindo que $\mathcal{X}_0 \equiv 0$, para toda a sequência de estados globais \mathcal{X}^* com valores em \mathbb{R}^n , existe $k \in \mathbb{Z}^+$ e uma sequência de entradas $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_{k-1}$ de modo que o estado global \mathcal{X}_k coincide com \mathcal{X}^* . Neste caso, dizemos que \mathcal{X}^* é atingível em k passos.

Analogamente ao que foi estudado no capítulo 1, a atingibilidade local de um sistema 2D será caracterizada usando a matriz de atingibilidade em k passos introduzida a seguir. Nessa definição, aplica-se a noção de produto de Hurwitz.

Definição 3.2.2. Sejam A e B matrizes de ordem n . O seu *produto de Hurwitz* é definido por:

1. $A^i \sqcup^j B = 0$, se $i < 0$ ou $j < 0$
2. $A^i \sqcup^0 B = A^i$, se $i \geq 0$
3. $A^0 \sqcup^j B = B^j$, se $j \geq 0$
4. $A^i \sqcup^j B = A \left(A^{i-1} \sqcup^j B \right) + B \left(A^i \sqcup^{j-1} B \right)$, se $i, j > 0$.

Exemplo 3.2.3. Sejam A e B matrizes de ordem n . Então

$$A^2 \sqcup^1 B = A^2 B + ABA + BA^2.$$

◇

Definição 3.2.4. Dado o sistema 2D (3.1), definimos a sua *matriz de atingibilidade em k passos* como sendo a matriz

$$\mathcal{R}_k = \left[\left(A_1^{i-1} \sqcup^j A_2 \right) B_1 + \left(A_1^i \sqcup^{j-1} A_2 \right) B_2 \right]_{i,j \geq 0, 0 < i+j \leq k}$$

Exemplo 3.2.5. A matriz de atingibilidade em 2 passos do sistema (3.1) é dada por

$$\mathcal{R}_2 = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & A_1 B_1 & A_1 B_2 + A_2 B_1 & A_2 B_2 \end{bmatrix} \quad \diamond$$

No teorema seguinte é apresentada uma caracterização necessária e suficiente da atingibilidade local de um sistema 2D.

Teorema 3.2.6. [5] *Um sistema 2D (A_1, A_2, B_1, B_2) é localmente atingível se e só se*

$$\text{rank } \mathcal{R}_n = n.$$

Claramente, a atingibilidade global implica a atingibilidade local. Vamos agora focar-nos na propriedade global. Começemos por definir a matriz da atingibilidade global.

Definição 3.2.7. A matriz

$$\mathcal{R}^n(z) = \begin{bmatrix} B(z) & A(z)B(z) & \cdots & A^{n-1}(z)B(z) \end{bmatrix},$$

onde n é a dimensão do estado local e as matrizes polinomiais $A(z)$ e $B(z)$ são definidas como em (3.4), chamamos *matriz de atingibilidade global* do sistema 2D (A_1, A_2, B_1, B_2) .

Note-se que, se $\mathcal{X}_0 \equiv 0$, então

$$\begin{aligned} X_k(z) &= \sum_{l=0}^{k-1} A^{k-1-l}(z)B(z)U_l(z) \\ &= \begin{bmatrix} B(z) & A(z)B(z) & \cdots & A^{k-1}(z)B(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{k-1}(z) \\ U_{k-2}(z) \\ \vdots \\ U_0(z) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto, o estado global \mathcal{X}^* é atingível em k passos se e só se

$$X^*(z) = \mathcal{Z}[\mathcal{X}^*] \in \text{Im } \mathcal{R}^k(z)$$

onde $\mathcal{R}^k(z) = \begin{bmatrix} B(z) & A(z)B(z) & \cdots & A^{k-1}(z)B(z) \end{bmatrix}$.

No teorema seguinte, a atingibilidade global é caracterizada em termos da matriz de atingibilidade global.

Teorema 3.2.8. [5] *O sistema 2D (A_1, A_2, B_1, B_2) é globalmente atingível se e só se $\text{rank } \mathcal{R}^n(z) = n$.*

3.3 Sistemas 2D estruturados

Nesta secção consideramos sistemas 2D da forma (3.1), onde as matrizes A_1, A_2, B_1 e B_2 são estruturadas, i.e., as suas entradas são zeros fixos ou parâmetros independentes.

Definição 3.3.1. Se as matrizes A_1, A_2, B_1 e B_2 forem estruturadas, dizemos que o sistema 2D descrito por (3.1) é um *sistema 2D estruturado* e representá-lo-emos apenas por $(A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda, B_2^\lambda)$.

Note-se que as matrizes polinomiais $A_\lambda(z) = A_1^\lambda + A_2^\lambda z$ e $B_\lambda(z) = B_1^\lambda + B_2^\lambda z$ são também matrizes (polinomiais) estruturadas. Para além disso, tomando

qualquer $\nu^* \in \mathbb{C}$, as matrizes $A_\lambda(\nu^*)$ e $B_\lambda(\nu^*)$ são também matrizes estruturadas.

Analogamente ao que foi feito no primeiro capítulo, iremos definir quando um sistema 2D estruturado é estruturalmente atingível.

Definição 3.3.2. O sistema 2D estruturado $(A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda, B_2^\lambda)$ é (*globalmente*) *atingível* se é estruturalmente (*globalmente*) atingível.

Note-se que se o sistema $(A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda, B_2^\lambda)$ é atingível para “quase todos” os valores de $\lambda \in \mathbb{R}^r$, onde r é o número de parâmetros existentes nas matrizes $A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda$ e B_2^λ , atendendo à Definição 3.2.1 e ao Teorema 3.2.8, isto implica que a matriz de atingibilidade

$$\mathcal{R}_\lambda^n(z) = \begin{bmatrix} B_\lambda(z) & A_\lambda(z)B_\lambda(z) & \cdots & A_\lambda^{n-1}(z)B_\lambda(z) \end{bmatrix},$$

que é uma matriz polinomial em λ e z , torna-se uma matriz polinomial em z de característica n para “quase todos” os valores de $\lambda \in \mathbb{R}^r$. Devido às propriedades das matrizes polinomiais, isto significa que $\mathcal{R}_{\lambda^*}^n(z)$ tem característica n para, pelo menos, um valor de $\lambda^* \in \mathbb{R}^r$. De novo, isto é equivalente a dizer que $(A_1^{\lambda^*}, A_2^{\lambda^*}, B_1^{\lambda^*}, B_2^{\lambda^*})$ é atingível para, pelo menos, um $\lambda^* \in \mathbb{R}^r$.

As noções de pares de matrizes na *forma I* e na *forma II* voltam a ter um papel importante na caracterização da atingibilidade, agora aplicadas ao par de matrizes polinomiais $(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$.

Definição 3.3.3. Sejam $A_\lambda(z) \in \mathbb{R}^{n \times n}[z]$ e $B_\lambda(z) \in \mathbb{R}^{n \times m}[z]$ matrizes polinomiais estruturadas. Dizemos que o par $(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$ está na:

- *forma I*, ou que é *reduzível*, se existir uma matriz de permutação $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$PA_\lambda(z)P^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11}^\lambda(z) & 0 \\ A_{21}^\lambda(z) & A_{22}^\lambda(z) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad PB_\lambda(z) = \begin{bmatrix} 0 \\ B_2^\lambda(z) \end{bmatrix}$$

onde $A_{ij}^\lambda(z)$ são matrizes polinomiais estruturadas do tipo $n_i \times n_j$, para $i, j = 1, 2$ e com $0 < n_1 \leq n$ e $n_1 + n_2 = n$, e onde $B_2^\lambda(z)$ é uma matriz polinomial estruturada do tipo $n_2 \times m$.

- *forma II*, ou que *não tem característica máxima*, se a característica da matriz polinomial estruturada $\begin{bmatrix} A_\lambda(z) & B_\lambda(z) \end{bmatrix}$ é menor que n .

Note-se que a característica de $\begin{bmatrix} A_\lambda(z) & B_\lambda(z) \end{bmatrix}$ é definida como

$$\max_{\lambda^* \in \mathbb{R}^r} \left(\text{rank} \begin{bmatrix} A_{\lambda^*}(z) & B_{\lambda^*}(z) \end{bmatrix} \right),$$

onde $\text{rank} \begin{bmatrix} A_{\lambda^*}(z) & B_{\lambda^*}(z) \end{bmatrix}$ denota a característica desta matriz polinomial em z .

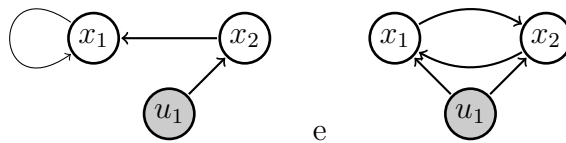
Para estabelecer uma caracterização da atingibilidade global usando grafos, definimos a seguir o grafo associado a um par de matrizes polinomiais estruturadas.

Definição 3.3.4. Sejam $A_\lambda(z) = A_1^\lambda + A_2^\lambda z$ e $B_\lambda(z) = B_1^\lambda + B_2^\lambda z$ duas matrizes polinomiais estruturadas. O *grafo associado ao par* $(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$ é a sobreposição dos grafos associados aos pares $(A_1^\lambda, B_1^\lambda)$ e $(A_2^\lambda, B_2^\lambda)$, eliminando as arestas repetidas que possam aparecer. Denotaremos esse grafo por $\mathcal{G}(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$.

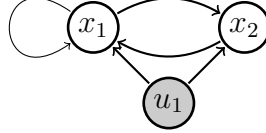
Exemplo 3.3.5. Consideremos as seguintes matrizes estruturadas

$$A_1^\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1^\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_5 \end{bmatrix}, A_2^\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_2^\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_6 \\ \lambda_7 \end{bmatrix}.$$

Os grafos associados aos pares $(A_1^\lambda, B_1^\lambda)$ e $(A_2^\lambda, B_2^\lambda)$ são, respetivamente,



E, portanto, o grafo associado ao par $(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$ é



◇

O lema seguinte será essencial na caracterização da atingibilidade global.

Lema 3.3.6. [11] *Seja $\nu^* \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Então, o par de matrizes polinomiais estruturadas $(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$ não está nem na forma I nem na forma II se e só se o par de matrizes estruturadas $(A_\lambda(\nu^*), B_\lambda(\nu^*))$ não estiver nem na forma I nem na forma II, onde $A_\lambda(z) = A_1^\lambda + A_2^\lambda z$ e $B_\lambda(z) = B_1^\lambda + B_2^\lambda z$.*

Demonstração. Para $\nu^* \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ambas as implicações são óbvias porque os grafos associados aos pares de matrizes estruturadas $(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$ e $(A_\lambda(\nu^*), B_\lambda(\nu^*))$ são iguais. □

Nota 3.3.7. A condição suficiente do lema anterior também é válida para $\nu^* = 0$. De facto, se $\nu^* = 0$ então $A_\lambda(0) = A_1^\lambda$ e $B_\lambda(0) = B_1^\lambda$. E, portanto, o grafo $\mathcal{G}(A_\lambda(0), B_\lambda(0)) = \mathcal{G}(A_1^\lambda, B_1^\lambda)$ gera $\mathcal{G}(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$ (e, em particular, tem os mesmos vértices). Se o par $(A_\lambda(0), B_\lambda(0))$ não estiver na forma I nem na forma II, pelo Lema 2.2.8 todos os vértices do grafo $\mathcal{G}(A_\lambda(0), B_\lambda(0))$ são acessíveis e, pelo Lema 2.2.19, existe em $\mathcal{G}(A_\lambda(0), B_\lambda(0))$ uma conexão fatorial com origem em U que contém todos os vértices de estado. Como $\mathcal{G}(A_\lambda(0), B_\lambda(0))$ gera $\mathcal{G}(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$ o mesmo acontece para $\mathcal{G}(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$.

O exemplo seguinte mostra que a condição necessária não se verifica para $\nu^* = 0$.

Exemplo 3.3.8. Sejam

$$A_1^\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2^\lambda = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}, B_1^\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_2^\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{bmatrix}.$$

Visto que todas as entradas de $(A_1^\lambda + A_2^\lambda, B_1^\lambda + B_2^\lambda)$ são independentes, este par não está nem na forma I nem na forma II e, pelo Lema 3.3.6, o mesmo é válido para o par $(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$. No entanto, é claro pela Definição 3.3.3 que o par $(A_\lambda(0), B_\lambda(0)) = (A_1^\lambda, B_1^\lambda)$ está nas formas I e II. \diamond

Com base no Lema 3.3.6 e nos Teoremas 1.2.4 e 3.2.6 obtemos o resultado principal desta secção, que caracteriza a atingibilidade global de sistemas 2D estruturados.

Teorema 3.3.9. [11] *Um sistema 2D estruturado $(A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda, B_2^\lambda)$ é globalmente atingível se e só se o par de matrizes estruturadas $(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$ não está nem na forma I nem na forma II, onde $A_\lambda(z) = A_1^\lambda + A_2^\lambda z$ e $B_\lambda(z) = B_1^\lambda + B_2^\lambda z$.*

Demonstração. Por definição, o sistema 2D estruturado $(A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda, B_2^\lambda)$ é globalmente atingível se existir $\lambda^* \in \mathbb{R}^r$ de tal forma que o sistema 2D $(A_1^{\lambda^*}, A_2^{\lambda^*}, B_1^{\lambda^*}, B_2^{\lambda^*})$ é globalmente atingível.

Então, pelo Teorema 3.2.8, $\text{rank } \mathcal{R}_{\lambda^*}^n(z) = n$, onde $\mathcal{R}_{\lambda^*}^n(z)$ é a matriz de atingibilidade global do sistema 2D $(A_1^{\lambda^*}, A_2^{\lambda^*}, B_1^{\lambda^*}, B_2^{\lambda^*})$. Note-se que, neste caso, o conjunto

$$\mathcal{L} = \{\eta \in \mathbb{C} : \text{rank } \mathcal{R}_{\lambda^*}^n(\eta) < \text{rank } \mathcal{R}_{\lambda^*}^n(z)\}$$

corresponde aos zeros comuns dos menores do tipo $n \times n$ da matriz $\mathcal{R}_{\lambda^*}^n(z)$ e, portanto, é um conjunto finito. Assim, $\text{rank } \mathcal{R}_{\lambda^*}^n(z) = n$ significa que existe $\nu^* \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$ tal que

$$\text{rank } \mathcal{R}_{\lambda^*}^n(\nu^*) = n.$$

Pelo Teorema 1.2.4, o sistema $(A_{\lambda^*}(\nu^*), B_{\lambda^*}(\nu^*))$ é atingível, para todo $\nu^* \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$. Consequentemente, por definição, $(A_{\lambda}(\nu^*), B_{\lambda}(\nu^*))$ é um sistema estruturado atingível.

Pelo Teorema 1.3.15, temos que o par de matrizes estruturadas $(A_{\lambda}(\gamma^*), B_{\lambda}(\gamma^*))$ não está na forma I nem na forma II e, pelo Lema 3.3.6, $(A_{\lambda}(z), B_{\lambda}(z))$ não está na forma I nem na forma II.

A demonstração da implicação recíproca é análoga. \square

Resulta da demonstração anterior que um sistema 2D estruturado $(A_1^{\lambda}, A_2^{\lambda}, B_1^{\lambda}, B_2^{\lambda})$ é globalmente atingível se e só se o par de matrizes estruturadas $(A_{\lambda}(\nu^*), B_{\lambda}(\nu^*))$ não está na forma I nem na forma II, para todo $\nu^* \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$. Pelo Teorema 2.2.30, isto significa que o grafo $\mathcal{G}(A_{\lambda}(\nu^*), B_{\lambda}(\nu^*))$ é gerado por um cati. Visto que, para todo $\nu^* \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, os grafos $\mathcal{G}(A_{\lambda}(z), B_{\lambda}(z))$ e $\mathcal{G}(A_{\lambda}(\nu^*), B_{\lambda}(\nu^*))$ são iguais, é válida a seguinte caracterização da atingibilidade global baseada na teoria dos grafos.

Corolário 3.3.10. *Um sistema 2D estruturado $(A_1^{\lambda}, A_2^{\lambda}, B_1^{\lambda}, B_2^{\lambda})$ é globalmente atingível se e só se existe um cati que gera o grafo $\mathcal{G}(A_{\lambda}(z), B_{\lambda}(z))$.*

Exemplo 3.3.11. Consideremos as matrizes estruturadas

$$A_1^{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{bmatrix}, A_2^{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 & \lambda_3 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 \end{bmatrix}, B_1^{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_2^{\lambda} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_7 \end{bmatrix},$$

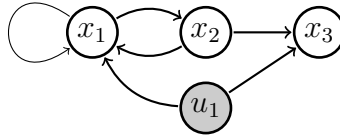
e definam-se as matrizes polinomiais estruturadas

$$A_{\lambda}(z) = A_1^{\lambda} + A_2^{\lambda}z = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_3z & 0 \\ \lambda_4z & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 + \lambda_5z & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$B_\lambda(z) = B_1^\lambda + B_2^\lambda z = \begin{bmatrix} \lambda_6 \\ 0 \\ \lambda_7 z \end{bmatrix}.$$

O grafo associado ao par $(A_\lambda(z), B_\lambda(z))$ é



e é fácil de verificar que esse grafo é gerado pelo cato com caule $\mathcal{S}_0 : u_1 \rightarrow x_3$ e rebento $\mathcal{B}_1 : u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_1$ ou, alternativamente, pelo cato apenas com o caule $\mathcal{S}_0 : u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3$. Pelo corolário anterior, o sistema 2D estruturado $(A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda, B_2^\lambda)$ é globalmente atingível. Isso pode, alternativamente, ser verificado a partir da matriz de atingibilidade global:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda^3(z) &= \begin{bmatrix} B_\lambda(z) & A_\lambda(z)B_\lambda(z) & A_\lambda^2(z)B_\lambda(z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_6 & \lambda_1\lambda_6 & \lambda_1^2\lambda_6 + \lambda_3\lambda_4\lambda_6z^2 \\ 0 & \lambda_4\lambda_6z & \lambda_1\lambda_4\lambda_6z \\ \lambda_7z & 0 & (\lambda_2 + \lambda_5z)\lambda_4\lambda_6z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Considerando $\lambda^* = (0, 1, 0, 1, 0, 1, 0)$, a matriz polinomial

$$\mathcal{R}_{\lambda^*}^3(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

tem característica 3 e, portanto, pelo Teorema 3.2.8, o sistema 2D $(A_1^{\lambda^*}, A_2^{\lambda^*}, B_1^{\lambda^*}, B_2^{\lambda^*})$ é globalmente atingível, o que, por definição, implica que o sistema 2D estruturado $(A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda, B_2^\lambda)$ é globalmente atingível. \diamond

Tanto quanto sabemos ainda não foi estabelecida nenhuma caracterização da atingibilidade local de sistemas 2D estruturados.

3.4 Sistemas 2D Positivos

Nesta secção introduzimos os sistemas 2D positivos e é caracterizada a atingibilidade local destes sistemas quer algebricamente quer usando a teoria de grafos.

Definição 3.4.1. Um *sistema 2D positivo* é um sistema (A_1, A_2, B_1, B_2) onde os seus estados locais e as suas entradas tomam valores não negativos e as matrizes A_1, A_2, B_1 e B_2 são não negativas¹.

Uma condição necessária e suficiente sobre atingibilidade local de sistemas 2D positivos é apresentada no teorema seguinte. Nesse teorema usamos a noção de matriz monomial definida a seguir.

Definição 3.4.2. Chamamos *matriz monomial* a uma matriz onde, em cada linha e cada coluna, existe uma única entrada não nula. Designaremos por *vetor i -monomial* um vetor em que todas as entradas são nulas exceto na linha i .

Teorema 3.4.3. [1] *O sistema 2D positivo (A_1, A_2, B_1, B_2) é localmente atingível se e só se existe $k \in \mathbb{N}$ tal que a matriz de atingibilidade em k passos possui uma submatriz monomial do tipo $n \times n$.*

Mais recentemente foi apresentada a seguinte caracterização que é mais simples de verificar mas é apenas necessária.

¹Uma matriz diz-se não negativa se todas as suas entradas forem não negativas

Lema 3.4.4. [6] *Se o sistema 2D positivo (A_1, A_2, B_1, B_2) é localmente atingível, então a matriz $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & B_1 & B_2 \end{bmatrix}$ possui uma submatriz monomial do tipo $n \times n$.*

Demonstração. Tendo em conta a estrutura das colunas da matriz de atingibilidade e o teorema anterior, se o sistema é localmente atingível então existem n pares não negativos $(h_i, k_i) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, com $i = 1, 2, \dots, n$, e n índices $j = j(i) \in \{1, 2, \dots, m\}$ tais que

$$\left(A_1^{h_i-1} \sqcup^{k_i} A_2 \right) B_1 e_j + \left(A_1^{h_i} \sqcup^{k_i-1} A_2 \right) B_2 e_j$$

é um vetor i -monomial. Se $h_i + k_i = 1$, o vetor i -monomial é uma coluna ou de B_1 ou de B_2 . Se $h_i + k_i > 1$, o vetor i -monomial é uma coluna ou de A_1 ou de A_2 (ou, possivelmente, de ambas). \square

Como num sistema 2D positivo todas as entradas das matrizes são não negativas (e portanto nunca ocorre cancelamento subtrativo), do ponto de vista dos grafos estes sistemas podem ser encarados como sistemas 2D estruturados onde cada entrada não nula é substituída por um parâmetro livre.

A definição de grafo 2D de sistemas 2D estruturados é a seguinte.

Definição 3.4.5. O grafo 2D do sistema 2D estruturado $(A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda, B_2^\lambda)$ é definido por um conjunto de vértices $V = U \cup X$, onde

$$U = \{u_1, \dots, u_m\} \text{ e } X = \{x_1, \dots, x_n\},$$

e um conjunto de arestas $E = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, onde

$$\mathcal{A}_1 = \{(x_j, x_i) : a_{1,ij} \neq 0\}^2, \mathcal{A}_2 = \{(x_j, x_i) : a_{2,ij} \neq 0\},$$

e

$$\mathcal{B}_1 = \{(u_j, x_i) : b_{1,ij} \neq 0\}, \mathcal{B}_2 = \{(u_j, x_i) : b_{2,ij} \neq 0\}.$$

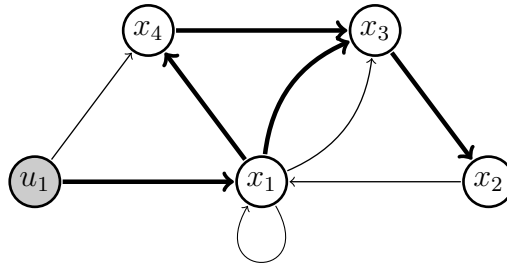
²A notação $a_{1,ij}$ representa a entrada (i, j) da matriz \mathcal{A}_1

As arestas dos conjuntos \mathcal{A}_1 e \mathcal{B}_1 serão representadas por linhas finas e as arestas dos conjuntos \mathcal{A}_2 e \mathcal{B}_2 por linhas grossas.

Exemplo 3.4.6. Consideremos o sistema 2D estruturado definido pelas matrizes

$$A_1^\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2^\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ \lambda_5 & 0 & 0 & \lambda_6 \\ \lambda_7 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1^\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_8 \end{bmatrix} \text{ e } B_2^\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O seu grafo 2D é



◇

As seguintes noções são necessárias para caracterizar a atingibilidade local de sistemas 2D positivos usando a teoria de grafos.

Definição 3.4.7. Um caule com vértice inicial u_j será chamado u_j -caule. Denotmos por $|p|_1$ o número total de arestas dos conjuntos \mathcal{A}_1 e \mathcal{B}_1 e por $|p|_2$ o número total de arestas dos conjuntos \mathcal{A}_2 e \mathcal{B}_2 pertencentes ao caule p . Então chamamos *composição* de p à matriz $\begin{bmatrix} |p|_1 & |p|_2 \end{bmatrix}$.

Teorema 3.4.8. [6] O sistema 2D positivo $(A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda, B_2^\lambda)$ é localmente atingível se e só se, para cada $i = 1, \dots, n$, existir $j = j(i)$ e uma composição $\begin{bmatrix} |p|_1 & |p|_2 \end{bmatrix}$ de tal forma que o vértice x_i é o vértice terminal de todos os u_j -caules com essa composição.

Demonstração. Pelos resultados anteriores, o sistema é localmente atingível se e só se existem n pares não negativos $(h_i, k_i) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+$, com $i = 1, 2, \dots, n$, e n índices $j = j(i) \in \{1, 2, \dots, m\}$ tais que

$$\left(A_1^{h_i-1} \sqcup^{k_i} A_2\right) B_1 e_j + \left(A_1^{h_i} \sqcup^{k_i-1} A_2\right) B_2 e_j$$

é um vetor i -monomial. No entanto, dizer que

$$\left(A_1^{h_i-1} \sqcup^{k_i} A_2\right) B_1 e_j + \left(A_1^{h_i} \sqcup^{k_i-1} A_2\right) B_2 e_j$$

é um vetor i -monomial, significa que o conjunto dos u_i -caules com composição $\begin{bmatrix} |p|_1 & |p|_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_i & k_i \end{bmatrix}$ não é vazio e cada um desses caules tem vértice terminal x_i . \square

Exemplo 3.4.9. Consideremos o sistema 2D estruturado do exemplo 3.4.6.

A matriz $\begin{bmatrix} A_1^\lambda & A_2^\lambda & B_1^\lambda & B_2^\lambda \end{bmatrix}$ inclui a submatriz monomial

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_8 \end{bmatrix}$$

e, portanto, nada se pode concluir do Lema 3.4.4 sobre a atingibilidade local do sistema.

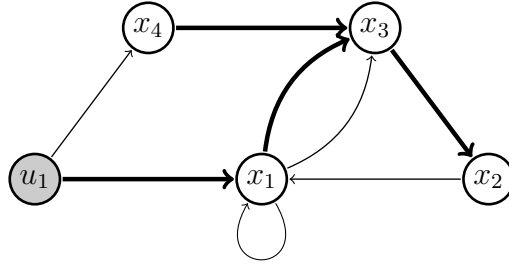
Por outro lado, $u_1 \rightarrow x_4$ é o único caule de composição $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $u_1 \rightarrow x_1$ é o único caule de composição $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_4 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$ é o único caule de composição $\begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}$. No entanto, não há nenhuma composição tal que x_3 seja o vértice terminal de todos os caules com essa composição. Logo, pelo Teorema 3.4.8, o sistema $(A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda, B_2^\lambda)$ não é localmente atingível. \diamond

Se no grafo do exemplo anterior a aresta (x_1, x_4) fosse removida o sistema já seria localmente atingível, como podemos verificar no exemplo seguinte.

Exemplo 3.4.10. Consideremos o sistema 2D estruturado definido pelas matrizes

$$A_1^\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2^\lambda = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ \lambda_5 & 0 & 0 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1^\lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_7 \end{bmatrix} \text{ e } B_2^\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O seu grafo 2D é



Analogamente ao exemplo anterior, a matriz $\begin{bmatrix} A_1^\lambda & A_2^\lambda & B_1^\lambda & B_2^\lambda \end{bmatrix}$ inclui a submatriz monomial

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \end{bmatrix}$$

e, portanto, nada se pode concluir do Lema 3.4.4 sobre a atingibilidade local do sistema. No entanto, é imediato verificar que os caules $u_1 \rightarrow x_4$, $u_1 \rightarrow x_1$, $u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_3$ e $u_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_3 \rightarrow x_2$ são os únicos caules de composição, respetivamente, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$. Consequentemente, pelo Teorema 3.4.8, o sistema $(A_1^\lambda, A_2^\lambda, B_1^\lambda, B_2^\lambda)$ é localmente atingível. \diamond

Conclusão

Neste trabalho começámos por introduzir os sistemas lineares discretos em espaço de estados e, em particular, caracterizámos a atingibilidade de tais sistemas. Definimos depois sistemas estruturados, isto é, sistemas onde todas as entradas das matrizes do sistema ou são parâmetros independentes ou são zeros fixos. A atingibilidade estrutural deste tipo de sistemas foi caracterizada algebricamente e usando a teoria de grafos.

Finalmente abordámos os sistemas 2D de acordo com o modelo Fornasini-Marchesini de espaço de estados, definimos sistemas 2D estruturados e caracterizámos a sua atingibilidade global, bem como a atingibilidade local apenas para sistemas 2D positivos.

Bibliografia

- [1] A. Berman and R. J. Plemmons. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. *New York: Academic*, 1979.
- [2] C. T. Chen. Introduction to Linear System Theory. *New York: Holt. Rinehan and Winston*, 203-212, 1970.
- [3] E. J. Davison and S.-H. Wang. Properties of linear time-invariant multivariable systems subject to arbitrary output and state feedback. *IEEE Trans. Autom. Control*, 18:24–32, 1973.
- [4] J.-M. Dion, C. Commault, and J. van der Woude. Generic properties and control of linear structured systems: A survey. *Automatica*, 39(7):1125–1144, 2003.
- [5] E. Fornasini and G. Marchesini. Doubly-indexed dynamical systems: State-space models and structural properties. *Math. Syst. Theory*, 12:59–72, 1978.
- [6] E. Fornasini and M.E. Valcher. Controllability and reachability of 2D positive systems: a graph theoretic approach. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 52(3):576-585, 2005.
- [7] K. Glover and L. Silverman. Characterization of structural controllability. *IEEE Trans. Autom. Control*, 21:534–537, 1976.

-
- [8] V. Kučera. *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*. Prentice Hall International Series in Systems and Control Engineering. New York: Prentice Hall. viii, 1992.
 - [9] C.-T. Lin. Structural controllability. *IEEE Trans. Autom. Control*, 19:201–208, 1974.
 - [10] H. Mayeda. On structural controllability theorem. *IEEE Trans. Autom. Control*, 26:795–798, 1981.
 - [11] R. Pereira, P. Rocha and R. Simões. Characterizations of global reachability of 2D structured systems. *Multidim. Syst. Sign. Process.*, 24:51-64, 2013.
 - [12] R. W. Shields and J. Pearson. Structural controllability of multiinput linear systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 21:203–212, 1976.
 - [13] R. P. Tewarson. Sparse Matrices. *IEEE Trans. Autom. Control*, 21:203–212, 1973.
 - [14] T. Yamada. Comments on “On structural controllability theorem”. *IEEE Trans. Autom. Control*, 29:1130–1131, 1984.